昆明学院学报　2016, 38(3):1~6　CN 53-1211/G4　ISSN 1674-5639
Journal of Kunming University

一类新的结构张量—*SB*-张量

郑苍松,马瑞丹,李耀堂*
(云南大学 数学与统计学院,云南 昆明 650091)

摘要:引入了一类新的结构张量—*SB*-张量,研究了其性质,并讨论它与几类已有的结构张量—*B*-张量、*DB*-张量和*MB*-张量等的关系,由此得到偶数阶实对称*SB*-张量的正定性.

关键词:*SB*-张量;*H*-特征值;性质;正定性
中图分类号:O151.24　**文献标识码**:A　**文章编号**:1674-5639(2016)03-0001-06
DOI:10.14091/j.cnki.kmxyxb.2016.03.001

A New Class of Structured Tensors—*SB*-tensor

ZHENG Cang-song, MA Rui-dan, LI Yao-tang*
(College of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Yunnan Kunming 650091, China)

Abstract: A new class of structured tensors, *SB*-tensor, is proposed, and some properties of *SB*-tensor are given. The relationship with some existing structured tensors, *B*-tensors, *DB*-tensors and *MB*-tensors, is discussed and the positive definite of even order real symmetric *SB*-tensors is obtained.

Key words: *SB*-tensors; *H*-eigenvalue; property; positive definite

1　预备知识

张量是多重线性代数领域近年来被广泛关注的研究课题,尤其是结构张量和张量特征值更是研究的重点. 本文提出一类新的结构张量——*SB*-张量,讨论其性质及其在张量正定性研究中的应用. 为叙述方便,先给出一些概念、符号等相关预备知识.

定义1[1]　设 $A=(a_{i_1\cdots i_m})$,其中 $a_{i_1\cdots i_m}\in C$(或 $a_{i_1\cdots i_m}\in R$),$i_j=1,\cdots,n;j=1,\cdots,m$,则称 A 是具有 n^m 个元素的 m 阶 n 维复(实)张量. 记 $C^{[m,n]}$($R^{[m,n]}$)为所有 m 阶 n 维复(实)张量所构成之集合. 特别地,若 $a_{i_1\cdots i_m}\geqslant 0(>0)$,$1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_m\leqslant n$,则称 $A=(a_{i_1\cdots i_m})$为非负(正)的;当

$$a_{i_1i_2\cdots i_m}=\delta_{i_1i_2\cdots i_m}=\begin{cases}1,\text{如果 } i_1=i_2=\cdots=i_m,\\0,\text{其他},\end{cases}$$

时,则称 A 为单位张量,记为 $I=(\delta_{i_1i_2\cdots i_m})$. 显然,向量为一阶张量,矩阵为二阶张量.

对于张量 $A=(a_{i_1\cdots i_m})\in R^{[m,n]}$,设 $N=\{1,2,\cdots,n\}$,S 为 N 的子集,令

$$R_i(A)=\sum_{\substack{i_2,\cdots,i_m\in N\\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}}|a_{ii_2\cdots i_m}|,R_i^S(A)=\sum_{\substack{i_2,\cdots,i_m\in S\\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}}|a_{ii_2\cdots i_m}|,$$

收稿日期:2016-03-29
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11361074).
作者简介:郑苍松(1991—),男,山东德州人,硕士生,主要从事矩阵理论及其应用研究;马瑞丹(1990—),女,河南安阳人,硕士生,主要从事矩阵理论及其应用研究.
*通讯作者:李耀堂(1958—),男,陕西宜川人,教授,博士生导师,主要从事数值代数及其应用研究,E-mail:liyaotang@ynu.edu.cn.

$$\tilde{R}_i^S(A)=R_i(A)-R_i^S(A),\beta_i(A)=\max_{\substack{i_2,\cdots,i_m\in N\\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}}\{0,a_{ii_1\cdots i_m}\},$$

$$\gamma_i(A)=\min_{\substack{i_2,\cdots,i_m\in N\\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}}\{0,a_{ii_1\cdots i_m}\},\Delta_i(A)=\sum_{\substack{i_2,\cdots,i_m\in N\\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}}(\beta_i(A)-a_{ii_2\cdots i_m}),$$

$$\theta_i(A)=\sum_{\substack{i_2,\cdots,i_m\in N\\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}}(a_{ii_2\cdots i_m}-\gamma_i(A)),$$

$$\Delta_i^j(A)=\sum_{\substack{i_2,\cdots,i_m\in N\\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0\\ \delta_{ji_2\cdots i_m}=0}}(\beta_i(A)-a_{ii_2\cdots i_m})=\Delta_i(A)-(\beta_i(A)-a_{ij\cdots j}),$$

$$\theta_i^j(A)=\sum_{\substack{i_2,\cdots,i_m\in N\\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0\\ \delta_{ji_2\cdots i_m}=0}}(a_{ii_2\cdots i_m}-\gamma_i(A))=\theta_i(A)-(a_{ij\cdots j}-\gamma_i(A)),$$

$$\Delta_i^S(A)=\sum_{\substack{i_2,\cdots,i_m\in S\\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}}(\beta_i(A)-a_{ii_2\cdots i_m}),\theta_i^S(A)=\sum_{\substack{i_2,\cdots,i_m\in S\\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}}(a_{ii_2\cdots i_m}-\gamma_i(A)),$$

$$\tilde{\Delta}_i^S(A)=\Delta_i(A)-\Delta_i^S(A),\ \tilde{\theta}_i^S(A)=\theta_i(A)-\theta_i^S(A).$$

设 $\operatorname{sign}(x)=\begin{cases}1,x>0,\\0,x=0,\\-1,x<0.\end{cases}$ 称 $\operatorname{sign}(x)$ 为符号函数.

定义 2[2] 设 $A=(a_{i_1i_2\cdots i_m})\in R^{[m,n]}$,若 $a_{ii_2\cdots i_m}\leqslant 0,\forall\delta_{ii_2\cdots i_m}=0$,则称 A 为 Z - 张量.

对于任意张量 $A=(a_{i_1i_2\cdots i_m})\in R^{[m,n]}$,将 A 写成如下形式:

$$A=B^++C, \tag{1}$$

其中,$B^+=(b^+_{i_1i_2\cdots i_m})\in R^{[m,n]},C=(c_{i_1i_2\cdots i_m})\in R^{[m,n]},b^+_{ii_2\cdots i_m}=a_{ii_2\cdots i_m}-\beta_i(A),c_{ii_2\cdots i_m}=\beta_i(A),\forall i\in N$.
由于 $b^+_{ii_2\cdots i_m}=a_{ii_2\cdots i_m}-\beta_i(A)\leqslant 0,\forall\delta_{ii_2\cdots i_m}=0$,故 B^+ 为 Z - 张量.

对于张量 $A=(a_{i_1i_2\cdots i_m})\in R^{[m,n]}$,也可以将 A 写成如下形式:

$$A=B^-+F, \tag{2}$$

其中,$B^-=(b^-_{i_1i_2\cdots i_m})\in R^{[m,n]},F=(f_{i_1i_2\cdots i_m})\in R^{[m,n]},b^-_{ii_2\cdots i_m}=a_{ii_2\cdots i_m}-\gamma_i(A),f_{ii_2\cdots i_m}=\gamma_i(A),\forall i\in N$.

显然,$b^-_{ii_2\cdots i_m}\geqslant 0,\forall\delta_{ii_2\cdots i_m}=0$,故 $-B^-$ 为 Z - 张量.

定义 3[1] 设 $A=(a_{i_1i_2\cdots i_m})\in R^{[m,n]}$,若

$$a_{i_1i_2\cdots i_m}=a_{\pi(i_1i_2\cdots i_m)},\forall\pi\in\Pi_m,$$

其中 Π_m 是指标集 m 的所有置换构成的集合,则称 A 为对称张量.

设 $A=(a_{i_1i_2\cdots i_m})\in C^{[m,n]},x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in C^n$,记 Ax^{m-1} 为第 i 个分量为 $(Ax^{m-1})_i=\sum_{i_2,\cdots,i_m\in N}a_{ii_2\cdots i_m}x_{i_2}\cdots x_{i_m}$ 的向量,记 $x^{[m-1]}=(x_1^{m-1},x_2^{m-1},\cdots,x_n^{m-1})^T$.

定义 4[3] 设 $A=(a_{i_1i_2\cdots i_m})\in C^{[m,n]},\lambda\in C$. 若存在非零向量 $x\in C^n$,使得 $Ax^{m-1}=\lambda x^{[m-1]}$,则称 λ 为 A 的特征值,x 为 A 的对应于 λ 的特征向量. 特别地,当 $\lambda\in R$ 且 $x\in R^n$ 时,称 λ 为 A 的 H - 特征值,x 为 A 的对应于 λ 的 H - 特征向量.

定义 5[1] 设 $A=(a_{i_1i_2\cdots i_m})\in C^{[m,n]},\rho(A)=\max\{|\lambda|:\lambda$ 为 A 的特征值$\}$,其中 $|\lambda|$ 表示 λ 的模. 称 $\rho(A)$ 为张量 A 的谱半径.

定义 6[2] 设 $A=(a_{i_1i_2\cdots i_m})\in R^{[m,n]}$ 为 Z - 张量,若 A 可表示为 $A=cI-B$,其中 B 为非负张量,实数 $c\geqslant\rho(B)(c>\rho(B))$,其中 $\rho(B)$ 为张量 B 的谱半径,则称 A 为(强)M - 张量.

定义 7[4] 设 $A=(a_{i_1i_2\cdots i_m})\in R^{[m,n]}$,若 $\forall i\in N$,有

$$\sum_{i_2,\cdots,i_m\in N} a_{ii_2\cdots i_m} > 0, \frac{1}{n^{m-1}}\Big(\sum_{\substack{i_2,\cdots,i_m\in N\\ \delta_{ij_2\cdots j_m}=0}} a_{ii_2\cdots i_m}\Big) > a_{ij_2\cdots j_m},$$

则称 A 为 B - 张量.

定义 8[5]　设 $A = (a_{i_1i_2\cdots i_m}) \in R^{[m,n]}$,令 $A = B^+ + C$. 若 B^+ 为强 M - 张量,则称 A 为 MB - 张量.

命题 1[6]　设 $A = (a_{i_1i_2\cdots i_m}) \in R^{[m,n]}$,则 A 为 B - 张量,当且仅当

$$a_{i\cdots i} - \beta_i(A) > \Delta_i(A), \forall i \in N.$$

定义 9[6]　设 $A = (a_{i_1i_2\cdots i_m}) \in R^{[m,n]}$,且 $a_{i\cdots i} > \beta_i(A), \forall i \in N$. 若下列条件成立:

1) $a_{i\cdots i} - \beta_i(A) \geqslant \Delta_i(A), \forall i \in N$;

2) $(a_{i\cdots i} - \beta_i(A))(a_{j\cdots j} - \beta_j(A)) > \Delta_i(A)\Delta_j(A), \forall i,j \in N$ 且 $i \neq j$.

则称 A 为 DB - 张量.

定义 10[3]　设 $A = (a_{i_1i_2\cdots i_m}) \in R^{[m,n]}$ 为对称张量,若对于任意向量 $x \in R^n$,有

$$Ax^m = \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_m\in N} a_{i_1i_2\cdots i_m} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m} \geqslant 0,$$

则称 A 为半正定的;若对于任意非零向量 $x \in R^n$,有 $Ax^m > 0$,则称 A 为正定的.

从定义容易看出,正定(半正定)张量的阶数 m 必为偶数,Hu 等在文献[3]中给出了张量的正定性与张量 H - 特征值之间的如下等价关系.

定理 1[3]　设 $A = (a_{i_1i_2\cdots i_m}) \in R^{[m,n]}$ 为偶数阶对称张量,则 A 为正定(半正定)的当且仅当它的所有 H - 特征值为正的(非负的).

2　SB - 张量及 $S\tilde{B}$ - 张量

本节,我们给出 SB - 张量及 $S\tilde{B}$ - 张量的定义,并对其性质进行研究.

定义 11　设 $A = (a_{i_1i_2\cdots i_m}) \in R^{[m,n]}$ 且 $a_{i\cdots i} > \beta_i(A), \forall i \in N$,$S$ 为 N 的非空子集. 若下列条件成立:

1) $a_{i\cdots i} - \beta_i(A) > \Delta_i(A), \forall i \in S$;

2) $(a_{i\cdots i} - \beta_i(A) - \Delta_i^S(A))(a_{j\cdots j} - \beta_j(A) - \tilde{\Delta}_j^S(A)) > \tilde{\Delta}_i^S(A)\Delta_j^S(A), \forall i \in S, j \in \bar{S}$.

则称 A 为 S - 严格对角占优 B - 张量,简称为 SB - 张量.

注:当 $S = N$ 时,SB - 张量就成为 B - 张量. 因此 B - 张量为 $S = N$ 时的 SB - 张量. 下例表明 SB - 张量不一定是 B - 张量,故 SB - 张量是 B - 张量的推广.

例 1　设 $A = (a_{i_1i_2i_3}) \in R^{[3,3]}$,取 $S = \{1\}$,其中

$a_{111} = 2, a_{222} = 4, a_{333} = 3, a_{112} = -1, a_{211} = a_{221} = -2, a_{311} = 1, a_{331} = 2$.

计算知 A 为 SB - 张量. 但由于 $a_{222} - \beta_2(A) = \Delta_2(A), a_{333} - \beta_3(A) = \Delta_3(A)$,故 $a_{iii} - \beta_i(A) > \Delta_i(A)$, $\forall i \in N$ 不成立,所以 A 不是 B - 张量.

定义 12[7]　设 $A = (a_{i_1i_2\cdots i_m}) \in R^{[m,n]}$,记

$$A_k = (a^{(k)}_{i_1i_2\cdots i_{m-1}}) \in R^{[m-1,n]}, \forall k \in N,$$

其中 $a^{(k)}_{i_1i_2\cdots i_{m-1}} = a_{ki_2\cdots i_{m-1}}, \forall i_1, i_2, \cdots, i_{m-1} \in N$,称 A_k 为 A 的第 k 行张量.

定义 13　设 $A = (a_{i_1i_2\cdots i_m}) \in R^{[m,n]}$. 令 $\tilde{A} = (\tilde{a}_{i_1i_2\cdots i_m}) \in R^{[m,n]}$,其中 $\tilde{A}_k = \mathrm{sign}(a_{k\cdots k})A_k$. 若 $\tilde{A}$ 为 SB - 张量,则称 A 为 $S\tilde{B}$ - 张量.

注:由定义 11 和定义 13 易知,若 A 为 SB - 张量,则 A 必为 $S\tilde{B}$ - 张量. 下例说明反之不成立.

例 2　设 $A = (a_{i_1i_2i_3}) \in R^{[3,3]}$,取 $S = \{1\}$,其中

$$a_{111} = -2, a_{222} = 4, a_{333} = 3, a_{112} = 1, a_{211} = a_{221} = -2, a_{311} = 1, a_{331} = 2.$$

计算知 A 为 $S\tilde{B}$ - 张量. 但由于 $a_{111} = -2, \beta_1(A) = 1$,因此 $a_{111} < \beta_1(A)$,即 $a_{iii} > \beta_i(A), \forall i \in N$ 不成立,故 A 不是 SB - 张量.

通过对实张量 A 进行(1) 式、(2) 式分裂以及定义 13,可得如下定理.

定理 2 设 $A=(a_{i_1i_2\cdots i_m})\in R^{[m,n]}$ 且对角元素非零,则 A 为 $S\tilde{B}$ - 张量当且仅当如下条件成立:

1) $|a_{i\cdots i}|>|\alpha_i(A)|,\forall i\in N$;

2) $|a_{i\cdots i}-\alpha_i(A)|>R_i(B),\forall i\in S$;

3) $(|a_{i\cdots i}-\alpha_i(A)|-R_i^S(B))(|a_{j\cdots j}-\alpha_j(A)|-\tilde{R}_j^S(B))>\tilde{R}_i^S(B)R_j^S(B),\forall i\in S,j\in\bar{S}$,其中,

$$\alpha_i(A)=\begin{cases}\beta_i(A),a_{i\cdots i}>0,\\ \gamma_i(A),a_{i\cdots i}<0.\end{cases}$$

$$R_i(B)=\begin{cases}R_i(B^+)=\Delta_i(A),a_{i\cdots i}>0,\\ R_i(B^-)=\theta_i(A),a_{i\cdots i}<0.\end{cases}$$

$$R_i^S(B)=\begin{cases}R_i^S(B^+)=\Delta_i^S(A),a_{i\cdots i}>0,\\ R_i^S(B^-)=\theta_i^S(A),a_{i\cdots i}<0.\end{cases}$$

$$\tilde{R}_i^S(B)=\begin{cases}\tilde{R}_i^S(B^+)=\tilde{\Delta}_i^S(A),a_{i\cdots i}>0,\\ \tilde{R}_i^S(B^-)=\tilde{\theta}_i^S(A),a_{i\cdots i}<0.\end{cases}$$

证明 由定义 13 知,A 为 $S\tilde{B}$ - 张量当且仅当 $\tilde{A}$ 为 SB - 张量. 由 $\tilde{A}$ 的定义知,若 $a_{i\cdots i}>0$,则 $\tilde{a}_{ii_2\cdots i_m}=a_{ii_2\cdots i_m},\forall i_2,\cdots,i_m\in N$;若 $a_{i\cdots i}<0$,则 $\tilde{a}_{ii_2\cdots i_m}=-a_{ii_2\cdots i_m},\forall i_2,\cdots,i_m\in N$.

必要性 设 $\tilde{A}$ 为 SB - 张量. 对于 $i\in N$,由 $\tilde{A}$ 为 SB - 张量知,若 $a_{i\cdots i}>0$,则有 $a_{i\cdots i}>\beta_i(A)$;若 $a_{i\cdots i}<0$,则有 $-a_{i\cdots i}>-\gamma_i(A)$. 故有 $|a_{i\cdots i}|>|\alpha_i(A)|,\forall i\in N$,即条件 1) 成立.

对于 $i\in S$, 由 $\tilde{A}$ 为 SB - 张量知, 若 $a_{i\cdots i}>0$, 则 $a_{i\cdots i}-\beta_i(A)>\Delta_i(A)$, 又因 $a_{i\cdots i}>\beta_i(A)$, 故 $|a_{i\cdots i}-\alpha_i(A)|>R_i(B^+)$; 若 $a_{i\cdots i}<0$, 则 $-a_{i\cdots i}-(-\gamma_i(A))>\theta_i(A)$, 又因 $-a_{i\cdots i}>-\gamma_i(A)$, 故 $|a_{i\cdots i}-\alpha_i(A)|>R_i(B^-)$. 于是 $\forall i\in S$,有 $|a_{i\cdots i}-\alpha_i(A)|>R_i(B)$,即条件 2) 成立.

对于任意 $i\in S,j\in\bar{S}$,由 $\tilde{A}$ 为 SB - 张量知,若 $a_{i\cdots i}>0$ 且 $a_{j\cdots j}>0$,则

$$(a_{i\cdots i}-\beta_i(A)-\Delta_i^S(A))(a_{j\cdots j}-\beta_j(A)-\tilde{\Delta}_j^S(A))>\tilde{\Delta}_i^S(A)\Delta_j^S(A),$$

即

$$(a_{i\cdots i}-\alpha_i(A)-R_i^S(B^+))(a_{j\cdots j}-\alpha_j(A)-\tilde{R}_j^S(B^+))>\tilde{R}_i^S(B^+)R_j^S(B^+).$$

因为 $a_{i\cdots i}>\alpha_i(A),|a_{i\cdots i}-\alpha_i(A)|>R_i(B^+)\geqslant R_i^S(B^+)$,故

$$a_{i\cdots i}-\alpha_i(A)-R_i^S(B^+)=|a_{i\cdots i}-\alpha_i(A)|-R_i^S(B^+)>0.$$

又因 $\tilde{R}_i^S(B^+)R_j^S(B^+)\geqslant 0$,所以

$$a_{j\cdots j}-\alpha_j(A)-\tilde{R}_j^S(B^+)=|a_{j\cdots j}-\alpha_j(A)|-\tilde{R}_j^S(B^+)>0.$$

因此有

$$(|a_{i\cdots i}-\alpha_i(A)|-R_i^S(B^+))(|a_{j\cdots j}-\alpha_j(A)|-\tilde{R}_j^S(B^+))>\tilde{R}_i^S(B^+)R_j^S(B^+),$$

即条件 3) 成立. 同理可证,当 $a_{i\cdots i}>0$ 且 $a_{j\cdots j}<0$,$a_{i\cdots i}<0$ 且 $a_{j\cdots j}<0$ 和 $a_{i\cdots i}<0$ 且 $a_{j\cdots j}>0$ 时,条件 3) 成立.

充分性 由条件 1) 知 $|a_{i\cdots i}|>|\alpha_i(A)|,\forall i\in N$. 故 $\forall i\in N$ 有,若 $a_{i\cdots i}>0$,则 $a_{i\cdots i}>\beta_i(A)$;若 $a_{i\cdots i}<0$,则 $-a_{i\cdots i}>-\gamma_i(A)$. 因此,有 $\tilde{a}_{i\cdots i}>\beta_i(\tilde{A}),\forall i\in N$.

由条件 2) 知 $|a_{i\cdots i}-\alpha_i(A)|>R_i(B),\forall i\in S$. 故 $\forall i\in S$ 有,若 $a_{i\cdots i}>0$,则 $|a_{i\cdots i}-\beta_i(A)|>\Delta_i(A)$,又因 $a_{i\cdots i}>\beta_i(A)$,故 $a_{i\cdots i}-\beta_i(A)>\Delta_i(A)$;若 $a_{i\cdots i}<0$,则 $|a_{i\cdots i}-\gamma_i(A)|>\theta_i(A)$,又因 $-a_{i\cdots i}>-\gamma_i(A)$,故 $-a_{i\cdots i}-(-\gamma_i(A))>\theta_i(A)$. 因此 $\tilde{a}_{i\cdots i}-\beta_i(\tilde{A})>\Delta_i(\tilde{A}),\forall i\in S$.

由条件 3) 知 $(|a_{i\cdots i}-\alpha_i(A)|-R_i^S(B))(|a_{j\cdots j}-\alpha_j(A)|-\tilde{R}_j^S(B))>\tilde{R}_i^S(B)R_j^S(B),\forall i\in S,j\in\bar{S}$. 故 $\forall i\in S,j\in\bar{S}$:若 $a_{i\cdots i}>0$ 且 $a_{j\cdots j}>0$,则有

$$(|a_{i\cdots i}-\beta_i(A)|-\Delta_i^S(A))(|a_{j\cdots j}-\beta_j(A)|-\tilde{\Delta}_j^S(A))>\tilde{\Delta}_i^S(A)\Delta_j^S(A).$$

又因　$a_{i\cdots i} > \beta_i(A)$ 且 $a_{j\cdots j} > \beta_j(A)$,则有

$$(a_{i\cdots i} - \beta_i(A) - \Delta_i^S(A))(a_{j\cdots j} - \beta_j(A) - \tilde{\Delta}_j^S(A)) > \tilde{\Delta}_i^S(A)\Delta_j^S(A);$$

同理可证,当 $a_{i\cdots i} > 0$ 且 $a_{j\cdots j} < 0$ 时,有

$$(a_{i\cdots i} - \beta_i(A) - \Delta_i^S(A))(-a_{j\cdots j} - (-\gamma_j(A)) - \tilde{\theta}_j^S(A)) > \tilde{\Delta}_i^S(A)\theta_j^S(A);$$

当 $a_{i\cdots i} < 0$ 且 $a_{j\cdots j} < 0$ 时,有

$$(-a_{i\cdots i} - (-\gamma_i(A)) - \theta_i^S(A))(-a_{j\cdots j} - (-\gamma_j(A)) - \tilde{\theta}_j^S(A)) > \tilde{\theta}_i^S(A)\theta_j^S(A);$$

当 $a_{i\cdots i} < 0$ 且 $a_{j\cdots j} > 0$ 时,有

$$(-a_{i\cdots i} - (-\gamma_i(A)) - \theta_i^S(A))(a_{j\cdots j} - \beta_j(A) - \tilde{\Delta}_j^S(A)) > \tilde{\theta}_i^S(A)\Delta_j^S(A).$$

故有

$$(\tilde{a}_{i\cdots i} - \beta_i(\tilde{A}) - \Delta_i^S(\tilde{A}))(\tilde{a}_{j\cdots j} - \beta_j(\tilde{A}) - \tilde{\Delta}_j^S(\tilde{A})) > \tilde{\Delta}_i^S(\tilde{A})\Delta_j^S(\tilde{A}), \forall i \in S, j \in \bar{S}.$$

于是 $\tilde{A}$ 为 SB - 张量.

3　SB - 张量与 DB - 张量及 MB - 张量等的关系及其正定性

本节讨论 SB - 张量与几类已知结构张量的关系及其正定性. 为讨论方便先给出几个概念和引理.

定义 14[2]　设 $A = (a_{i_1i_2\cdots i_m}) \in R^{[m,n]}$,若 $|a_{i\cdots i}| > R_i(A), \forall i \in N$,则称 A 为严格对角占优张量,简称为 SDD - 张量.

定义 15　设 $A = (a_{i_1i_2\cdots i_m}) \in R^{[m,n]}$,$S$ 为 N 的非空子集. 若下述条件成立:

1) $|a_{i\cdots i}| > R_i(A), \forall i \in S$;

2) $(|a_{i\cdots i}| - R_i^S(A))(|a_{j\cdots j}| - \tilde{R}_j^S(A)) > \tilde{R}_i^S(A)R_j^S(A), \forall i \in S, j \in \bar{S}$.

则称 A 为 S - 严格对角占优张量,简称为 $SSDD$ - 张量.

定义 16[8]　设 $A = (a_{i_1i_2\cdots i_m}) \in C^{[m,n]}$,若存在正向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in R^n$,使得

$$|a_{i\cdots i}|x_i^{m-1} > \sum_{\substack{i_2,\cdots,i_m \in N \\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}} |a_{ii_2\cdots i_m}|x_{i_2}\cdots x_{i_m}, i = 1, 2, \cdots, n,$$

则称 A 为 H - 张量.

引理 1[9]　设 $A = (a_{i_1i_2\cdots i_m}) \in R^{[m,n]}$. 若存在 N 的非空子集 S 使 A 为 $SSDD$ - 张量,则 A 为 H - 张量.

引理 2[8]　设 A 为 m 阶 n 维实对称张量且 m 为偶数,$a_{i\cdots i} > 0, \forall i \in N$. 若 A 为 H - 张量,则 A 是正定的.

DB - 张量、MB - 张量、$SSDD$ - 张量和强 H - 张量是几类重要的结构张量,在张量的正定性等研究中有重要应用. 下面讨论 SB - 张量和 DB - 张量、MB - 张量的关系.

Li 等[5-6] 证明了 B - 张量一定为 DB - 张量,DB - 张量一定为 MB - 张量. 由定义 11 知,B - 张量一定为 SB - 张量. 下例说明 DB - 张量不一定是 SB - 张量,SB - 张量也不一定为 DB - 张量.

例 3　设 $A = (a_{i_1i_2i_3i_4}) \in R^{[4,2]}$,其中

$$a_{1111} = 1, a_{2222} = 4, a_{1222} = a_{2122} = a_{2212} = a_{2221} = -1.$$

通过计算有 $\beta_1(A) = \beta_2(A) = 0, \Delta_1(A) = 1, \Delta_2(A) = 3$,故

$$a_{1111} - \beta_1(A) = 1 = \Delta_1(A), a_{2222} - \beta_2(A) = 4 > 3 = \Delta_2(A),$$

$$(a_{1\cdots 1} - \beta_1(A))(a_{2\cdots 2} - \beta_2(A)) = 4 > 3 = \Delta_1(A)\Delta_2(A).$$

因此,A 为 DB - 张量. 但是,当 $S = \{1\}$ 时,有 $a_{1111} - \beta_1(A) = \Delta_1(A)$. $a_{1111} - \beta_1(A) > \Delta_1(A)$ 不成立,故 A 未必是 SB - 张量.

例 4　设 $A = (a_{i_1i_2i_3i_4}) \in R^{[4,2]}$,$S = \{1\}$,其中

$$a_{1111} = 2, a_{2222} = 5, a_{1222} = a_{2212} = a_{2221} = -1, a_{2111} = -4.$$

通过计算得

$\beta_1(A)=\beta_2(A)=0,\Delta_1(A)=1,\Delta_2(A)=6,\Delta_1^S(A)=0,\tilde{\Delta}_1^S(A)=1,\Delta_2^S(A)=4,\tilde{\Delta}_2^S(A)=2.$

故有

$$(a_{1\cdots1}-\beta_1(A)-\Delta_1^S(A))(a_{2\cdots2}-\beta_2(A)-\tilde{\Delta}_2^S(A))=6>4=\tilde{\Delta}_1^S(A)\Delta_2^S(A).$$

因此,A 为 SB - 张量. 但 $a_{2222}-\beta_2(A)=5<6=\Delta_2(A)$,即 $a_{2222}-\beta_2(A)\geqslant\Delta_2(A)$ 不成立,故 A 不是 DB - 张量.

通过例 3 和例 4 知,DB - 张量与 SB - 张量互不包含. 下面讨论 SB - 张量与 MB - 张量之间的关系,先看如下引理.

引理 3[2] 设 $A=(a_{i_1i_2\cdots i_m})\in R^{[m,n]}$ 为 Z - 张量,则 A 为(强)M - 张量当且仅当它的 H - 特征值为(正的)非负的.

定理 3 设 $A=(a_{i_1i_2\cdots i_m})\in R^{[m,n]}$,若 A 为 SB - 张量,则 A 为 MB - 张量.

证明 将张量 A 写成 $A=B^++C$ 的形式. 显然,B^+ 为 Z - 张量. 由定义 11 及定义 15 知,若 A 为 SB - 张量,则 A 必为 $S\tilde{B}$ - 张量. 于是由定理 2 知,

$$|b_{i\cdots i}|=|a_{i\cdots i}-\beta_i(A)|>\Delta_i(A)=R_i(B^+),\forall i\in S,$$

$$(|b_{i\cdots i}|-R_i^S(B^+))(|b_{j\cdots j}|-\tilde{R}_j^S(B^+))=(|a_{i\cdots i}-\beta_i(A)|-\Delta_i^S(A))(|a_{j\cdots j}-\beta_j(A)|-\tilde{\Delta}_j^S(A))>\tilde{\Delta}_i^S(A)\Delta_j^S(A)=\tilde{R}_i^S(B^+)R_j^S(B^+),\forall i\in S,j\in\bar{S},$$

故 B^+ 为 $SSDD$ - 张量,由引理 1 知 B^+ 为 H - 张量. 又因 B^+ 为 Z - 张量,再由引理 2 和引理 3 知,B^+ 为强 M - 张量. 因此,A 为 MB - 张量.

下面,我们讨论 SB - 张量的正定性.

引理 4[6] 设 $A=(a_{i_1i_2\cdots i_m})\in R^{[m,n]}$ 为偶数阶对称 MB - 张量,则 A 为正定的.

由定理 3 和引理 4 直接得到如下定理.

定理 4 设 $A=(a_{i_1i_2\cdots i_m})\in R^{[m,n]}$ 为偶数阶对称 SB - 张量,则 A 是正定的.

由定理 4 和定理 1 直接得到如下推理.

推论 1 偶数阶对称 SB - 张量的所有 H - 特征值为正数.

[参考文献]

[1]QI L. Eigenvalues of a real supersymmetric tensor[J]. Journal of Symbolic Computation,2005,40(6):1302 - 1324.

[2]ZHANG L,QI L,ZHOU G. M - tensors and some applications[J]. Siam Journal on Matrix Analysis & Applications,2014,35(2):437 - 452.

[3]HU S,QI L,SHAO J Y. Cored hypergraphs,power hypergraphs and their laplacian H - eigenvalues[J]. Linear Algebra & Its Applications,2013,439(10):2980 - 2998.

[4]SONG Y,QI L. Properties of some classes of structured tensors[J]. Journal of Optimization Theory & Applications,2014,165:854 - 873.

[5]LI C,QI L,LI Y. MB - tensors and MBO - tensors[J]. Linear Algebra & Its Applications,2014,484:141 - 153.

[6]LI C,LI Y. Double B - tensor and quasi-double B - tensor[J]. Linear Algebra & Its Applications,2015,466:343 - 356.

[7]CHEN Z,QI L. Circulant tensors with applications to spectral hypergraph theory and stochastic process[J]. Journal of Industrial & Management Optimization,2016,12(4):1227 - 1247.

[8]LI C,WANG F,ZHAO J,et al. Criterions for the positive definiteness of real supersymmetric tensors[J]. Journal of Computational & Applied Mathematics,2014,255(285):1 - 14.

[9]ZHAO Ruijuan,GAO Lei,LIU Qilong,et al. Criterions for identifying H - tensors[J]. Frontiers of Mathematics in China,2016(1):1 - 18.