

# Henon 映射序列性质的模拟研究

何松林<sup>1</sup>, 黄 焱<sup>2</sup>, 黄 鉴<sup>2</sup>

(1. 昆明学院 资产管理与设备处, 云南 昆明 650214; 2. 昆明学院 物理科学与技术系, 云南 昆明 650214)

**摘要:**利用由 Matlab 编写的绘制 Henon 映射分岔图及绘制任意周期或混沌状态的参数分布图程序, 采用数值模拟的方法分析了各种参数条件下产生的 Henon 映射序列, 发现其性质由参数  $a$  和  $b$  的具体取值决定, 参数  $b$  在  $[-1, 1)$  内的任意一个取值, 总可以找到参数  $a$  的 1 个或几个特定的取值范围, 使映射序列形成混沌.

**关键词:**Henon 映射; 分岔图; 混沌

**中图分类号:**0322 **文献标识码:**A **文章编号:**1674-5639(2012)06-0081-03

## Simulating Study on the Properties of Henon Mapping Sequences

HE Song-lin<sup>1</sup>, HUANG Yan<sup>2</sup>, HUANG Jian<sup>2</sup>

(1. Department of Asset and Equipment Management, Kunming University, Yunnan Kunming 650214, China;

2. Department of Physics Science and Technology, Kunming University, Yunnan Kunming 650214, China)

**Abstract:** The Henon mapping sequence properties have been analyzed by using Matlab program, which is prepared to draw bifurcation diagram of Henon map and distribution diagram of parameters with which periodic or chaotic state can be yielded. It is concluded that the properties of mapping sequence are determined by the specific values of parameter  $a$  and  $b$ . For any  $b \in [-1, 1)$ , the chaotic mapping sequence can be generated if the range of parameter  $a$  is suitable.

**Key words:** Henon map; bifurcation diagram; chaos

1976 年, Henon 提出一种二维映射<sup>[1]</sup>, 其表达式为

$$\begin{cases} x_{i+1} = y_i + 1 - ax_i^2, \\ y_{i+1} = bx_i, \end{cases} \quad (1)$$

并且对  $a = 1.4$  和  $b = 0.3$  时, 该映射出现的奇怪吸引子进行了详细研究. 从此以后, 由 (1) 式表示的映射被称为 Henon 映射, 与该映射有关的研究一直不断<sup>[2-4]</sup>. 最近, 用 Henon 映射产生的混沌序列进行图像加密的报道<sup>[5-7]</sup> 逐渐增多, 但都是以 Henon 所选定的参数, 采用初始值作为密钥, 生成不同的混沌序列进行加密. 而有关 Henon 映射在其它参数条件下映射序列的性质研究未见报道. 本文将采用数值模拟方法, 对 Henon 映射在不同参数条件下产生的序列进行分析研究, 希望得出不同参数取值情况下映射序列的性质, 对 Henon 映射在各种信息加密中的应用提供帮助.

### 1 Henon 映射存在有限序列的条件

由 (1) 式知, 若  $|b| > 1$ , 则无论初始值如何, 经无限多次迭代后, 均有  $|x_{n \rightarrow \infty}| \rightarrow \infty$  和  $|y_{n \rightarrow \infty}| \rightarrow \infty$ . 因而, 要得到有限的迭代序列, 参数  $b$  的取值只能限制在  $-1$  和  $1$  之间.

若  $a \neq 0$ , 由 (1) 式可求得, 当条件<sup>[8]</sup>

$$a \geq -\frac{1}{4}(1-b)^2 \quad (2)$$

成立时, Henon 映射存在 2 个实的不动点, 其坐标为

$$\begin{cases} x^* = \frac{b-1 \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}, \\ y^* = bx^*. \end{cases} \quad (3)$$

若  $a \in (-\frac{1}{4}(1-b)^2, 0) \cup (0, \frac{3}{4}(1-b)^2)$ ,

(3) 式中取正号的不动点为吸引子.

由上面的分析知, Henon 映射要得到有限的迭代序列, 条件  $|b| \leq 1$  必须满足, 同时参数  $a$  应满足 (2) 式.

### 2 Henon 映射的数值模拟方法

前面分析了 Henon 映射存在有限序列的必要条件, 但不同参数取值时序列的性质难以解析分析, 需采用数值模拟方法进行研究. 为了考察 (1) 式在不同参数条件下映射序列的性质, 采用 Matlab 编程<sup>[9]</sup>, 分别研究分岔图以及周期状态和混沌状态对应的参数取值范围.

#### 2.1 分岔图程序设计

当参数  $b$  和  $a$  的值取定后, (1) 式表示的映射经多次迭代后的序列  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$  可能存在 3 种情

收稿日期: 2012-11-19

基金项目: 云南省教育厅科学研究基金资助项目 (2011C099)

作者简介: 何松林 (1964—), 男, 云南保山人, 教授, 主要从事非线性物理研究.

况,分别是:

- 1)多次迭代过程中,从某次开始,其后所有的 $x_n$ (或 $y_n$ )都为无限大,这种情况称为发散.
- 2)多次迭代过程中,从某次开始,其后所有的 $x_n$ (或 $y_n$ )只存在有限( $m$ )种取值,这时称映射处于周期状态,周期为 $m$ .
- 3)无论迭代多少次, $x_n$ (或 $y_n$ )的取值都不会出现规律,整个序列看上去是随机的,但却与初始值的选取密切相关,这时称映射处于混沌状态.

保持参数 $b$ 不变,某种初始条件下(1)式的迭代值(舍去前面不稳定的暂态值)随 $a$ 的变化关系图称为分岔图,它可以反映同一个 $b$ 值下, $a$ 取不同值时映射所处的状态. 程序设计成用户自行输入参数 $b$ 、初始值 $x_0, y_0$ 及参数 $a$ 的取值范围后,按(1)式对 $a$ 的每个步长值下的 $x_n$ 和 $y_n$ 进行迭代计算,将801次迭代后的400个 $x_n$ 值对应同一个 $a$ 值作图,形成分岔图,以此反映映射状态随参数 $a$ 的变化情况.

2.2 周期 $m$ 或混沌状态的参数分布图

由前述分析知,在不同的参数取值情况下, Henon映射的有限序列可以处于周期或混沌状态. 因此可以设计程序,让参数 $b$ 和 $a$ 在某个范围内变化,对每一种参数取值的情况,按(1)式进行迭代运算,分析迭代序列的规律,确定出此参数条件下映射的状态. 程序设计成可以输入周期数后,找出产生这种周期的参数 $b$ 和 $a$ 的不同组合. 当周期数选为与序列值个数相同时,可以认为序列没有周期,或者说此时序列是随机的,映射处于混沌状态.

3 数值模拟结果

3.1 一维平方映射

当 $b = 0$ 时,(1)式迭代产生的点全部分布在 $x$ 轴上,形成一维映射. 由(2)式知,要形成实不动点需 $a \geq -\frac{1}{4}$ . 该条件下(1)式的分岔全图如图1.

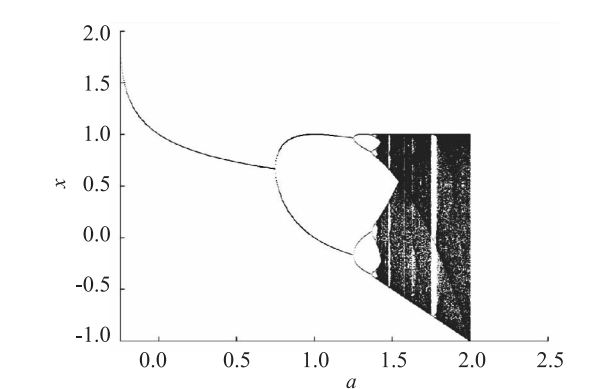


图1  $b=0$ 时Henon映射的分岔全图

从图1可见, $b = 0$ 时,参数 $a$ 在 $-0.25$ 到 $2$ 的范围内,映射存在有限序列. 采用局部放大(缩小 $a$ 的取值范围)观察,发现 $a \in [-0.25, 0.75)$ 时,映射处于周期1状态; $a \in [0.75, 1.25)$ 映射处于周期2状态; $a \in [1.25, 1.3675)$ 映射处于周期4状

态; $a \in [1.3675, 1.3940)$ 映射处于周期8状态…….也就是说,映射在 $a = 0.75, 1.25, 1.3675, 1.3940, \dots$ 等处发生了倍周期分岔.  $a \in (1.4, 2)$ 映射出现混沌,随 $a$ 的增加,混沌序列由局限在一些分离的区域,逐渐发展到在一个数值范围内随机出现. 同时在产生混沌的区域,可明显观察到一些周期窗口. 如图2所示, $a \in [1.75, 1.77)$ 出现了周期3窗口; $a \in [1.6244, 1.6285)$ 出现周期5窗口等. 如图3所示,在 $a \in [1.995, 2]$ 的范围内,映射序列的取值 $x_n$ 较均匀地随机分布在 $[-1, 1]$ 上,这可以较好的用于信息加密.

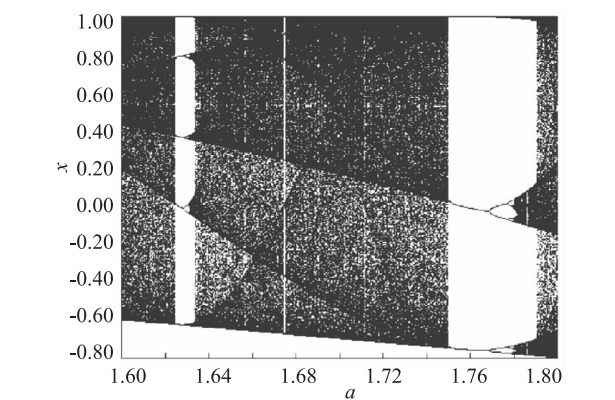


图2  $b=0$ 时Henon映射的局部分岔图

3.2 保守系统映射

当 $|b| = 1$ 时,(1)式表示系统在运动中保持相平面面积不变,描述保守系统<sup>[10]</sup>. 数值模拟发现, $b = 1$ 时,仅当 $a \in [0, 0.1189]$ 时存在有限序列,并且变化很复杂. 当 $b = -1, a \in [-0.66, 1.047]$ 时存在有限序列,下图4显示了这一情况. 进一步分析表明, $a = 0$ 时出现周期2,其它区域有些出现混沌,有些存在周期,有些似乎周期与混沌共存.

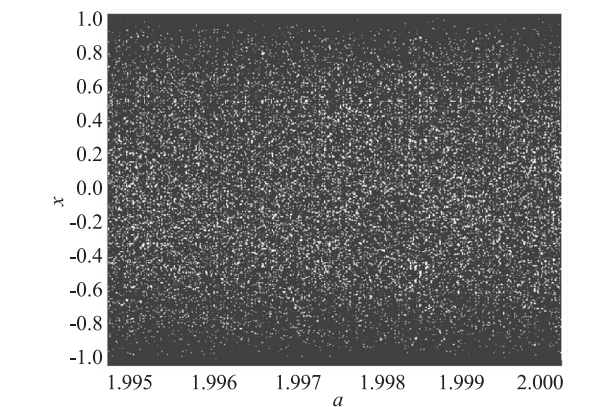


图3  $b=0, a \in [1.995, 2]$ 的分岔图

3.3 耗散系统映射

当 $|b| < 1$ 时,(1)式表示系统在运动中相平面面积逐渐缩小,代表耗散系统. 数值模拟发现这种情况下映射序列具有丰富的变化.

3.3.1  $0 < b < 1$ 时映射序列的性质

当 $b > 0$ 且从趋于0逐渐增大到趋于1的过程

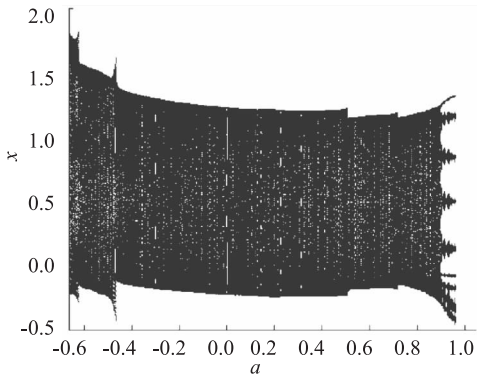


图4  $b=1$ 时Henon映射的分岔全图

中,映射序列存在以下特点:

- 1)存在有限序列的参数  $a$  的范围逐渐减小.  $b = 0$  时,  $a \in (-0.25, 2)$  的范围内存在有限序列,而  $b = 1$  时,仅  $a \in [0, 0.1189]$  的范围内存在有限序列.
- 2)存在混沌序列的参数  $a$  的范围逐渐减小,以致最后消失.  $b = 0$  时,  $a \in (1.4, 2)$  的范围内存在混沌序列,而  $b \rightarrow 1$  时,没有观察到有限混沌序列.
- 3)随着参数  $b$  的增大,各种倍周期分岔对应的参数  $a$  的取值逐渐减小,相应的开始出现混沌序列的  $a$  值也逐渐减小.如图 5 所示,随  $b$  值从 0 增大到 0.4,倍周期分岔(周期 2 到周期 4,周期 4 到周期 8)及开始出现混沌所对应的参数  $a$  的取值不断减小.

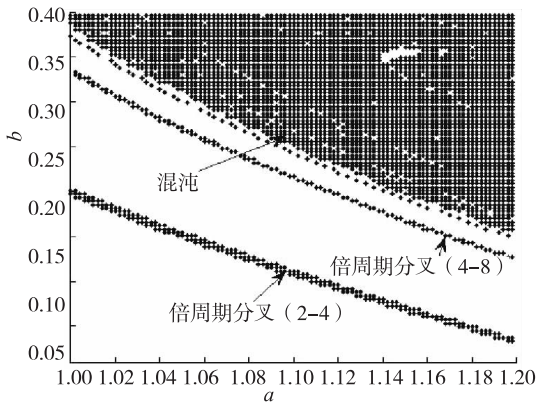


图5 倍周期分岔及混沌状态的参数变化图

3.3.3.2  $-1 < b < 0$  时映射序列的性质

当  $b < 0$  且从趋于 0 逐渐减小到趋于  $-1$  的过程中,存在有限序列的参数  $a$  的范围逐渐增大,但在趋于  $-1$  时会突然缩小;存在混沌序列的参数  $a$  的范围逐渐减小,以致最后消失,但在趋于  $-1$  时会突然增大.这反映了  $-1 < b < 0$  时 Henon 映射序列状态变化的复杂性,是有待深入研究的内容.

3.3.3.3 周期 3 与混沌

除  $b$  趋于 1 外,在参数  $b$  由  $-1$  到 1 的绝大部分范围内,都可以观察到混沌状态,但不同  $b$  值出现混沌时对应的参数  $a$  的取值范围各不相同.存在混沌序列的参数  $a$  的取值范围内会出现周期窗口,混沌序列在某一个或几个区域比较均匀是两个共同的特征.

另一个值得注意的特点是,在参数  $b$  由  $-1$  到 1 的整个范围内,仅在  $b \in (-0.03, 0.05)$  时观察到周期 3 状态,其它区域看不到有限的周期 3 序列,如图 6 所示.这说明一维单峰映射中周期 3 意味着混沌<sup>[11]</sup>的结论,在高维映射中应该有其它的表现形式.

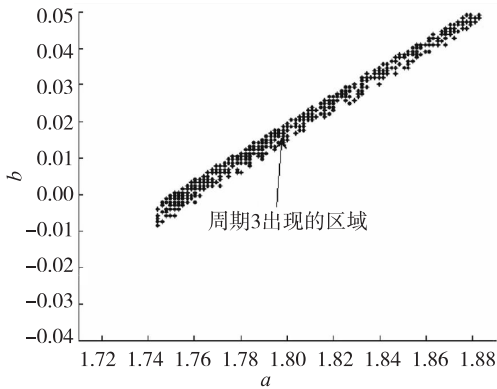


图6 Henon映射序列出现周期3的参数分布图

综上所述, Henon 映射在不同的参数取值情况下,映射序列会呈现出丰富多彩的变化.映射序列的性质由参数  $a$  和  $b$  的具体数值确定.参数  $b$  在  $[-1, 1]$  的任意一个取值,总可以找到参数  $a$  的 1 个或几个特定的取值范围,使映射产生混沌.虽然许多变化的细节及产生这些变化的原因有待进一步的工作,但本文的结果拓宽了采用 Henon 映射混沌序列进行信息加密时参数选取的范围,可使参数的选取有更大的灵活性.

[参考文献]

[1] HENON M. A two dimensional mapping with a strange attractor[J]. J Commun Math Phys, 1976, 50: 69 – 77.

[2] D’ALESSANDRO G, GRASSBERGER P, ISOLA S, et al. On the Topology of the Henon map[J]. J Phys A: Math. Gen, 1990, 23: 5285 – 5294.

[3] 迟洪钦, 吴忠英. 关于 Henon 映射的参数分布[J]. 上海交通大学学报, 1994, 28(5): 96 – 99.

[4] 包伯成, 康祝圣, 许建平, 等. 含指数项广义平方映射的分岔和吸引子[J]. 物理学报, 2009, 58(3): 1420 – 1431.

[5] 郑凡, 田小建, 范文华, 等. 基于 Henon 映射的数字图像加密[J]. 北京邮电大学学报, 2008, 31(1): 66 – 70.

[6] 乐鸿辉, 李涛, 石磊. 应用 Henon 超混沌系统改进的图像加密[J]. 计算机应用, 2011, 31(7): 1909 – 1916.

[7] 平萍, 王志坚, 许峰, 等. 一种基于 Henon 映射的图像加密算法的分析及改进[J]. 南京理工大学学报, 2012, 36(4): 587 – 592.

[8] 吴忠英, 迟洪钦. Henon 映射的不动点和吸引子[J]. 上海师范大学学报: 自然科学版, 1997, 26(1): 42 – 49.

[9] 刘惠颖. MATLAB R2007 基础教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.

[10] 陆同兴. 非线性物理概论[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2002.

[11] LI Tien-Yien, YORK J A. Period three implies chaos[J]. The American Mathematical Monthly, 1975, 82(10): 985 – 99.