昆明学院学报　2021，43（3）：50～58　ISSN 1674－5639　CN 53－1211/G4
Journal of Kunming University

具强阻尼的 Sine-Gordon 型吊桥方程的长时间动力学行为研究

吕鹏辉，吕小俊*
（苏州大学 应用技术学院，江苏 苏州 215325）

摘要：在其他学者研究的基础上，根据吊桥方程和 Sine-Gordon 方程的特点，研究了具强阻尼的 Sine-Gordon 型吊桥方程的长时间动力学行为．首先在给定适当的假设条件下，利用 Galerkin 有限元方法得到此类方程的整体解；其次使用算子分解方法研究了该类吊桥方程的整体吸引子；最后采用将方程线性化处理的方法，得到该类吊桥方程的整体吸引子的 Hausdorff 维数和分形维数存在上界．

关键词：Sine-Gordon 型吊桥方程；整体吸引子；Hausdorff 维数；分形维数
中图分类号：O211.6　**文献标识码**：A　**文章编号**：1674－5639（2021）03－0050－09
DOI：10.14091/j.cnki.kmxyxb.2021.03.012

Research on Long-time Dynamic Behavior of the Sine-Gordon Type Suspension Bridge Equation with Strong Damping

LV Penghui，LV Xiaojun*
（Applied Technology College，Soochow University，Suzhou，Jiangsu，China　215325）

Abstract：Based on the research of other scholars，according to the features of suspension bridge equation and Sine-Gordon equation，we studied the long-time dynamic behavior of the Sine-Gordon type suspension bridge equation with strong damping. Firstly，the global solution of this kind of suspension bridge equation is obtained by Galerkin finite element method under the given appropriate assumptions. Then the global attractor of this kind of suspension bridge equation is obtained by operator decomposition method. Finally，the upper bound of Hausdorff dimension and fractal dimension of the global attractor is obtained by linearizing the equation.
Key words：Sine-Gordon type suspension bridge equation；global attractor；Hausdorff dimension；fractal dimension

本文所研究的具强阻尼的 Sine-Gordon 型吊桥方程的长时间动力学行为：

$$u_{tt} - \Delta u_t + \Delta^2 u + k^2 u^+ + g(\sin u) + f(u) = h(x), (x, t) \in \Omega \times [0, \infty), \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x, t) = \Delta u(x, t) = 0, x \in \Gamma. \tag{3}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}$ 中具有光滑边界的有界域，其光滑边界为 Γ，k^2 是弹性系数，函数为：

$$u^+ = \begin{cases} u, & u > 0, \\ 0, & u \leqslant 0. \end{cases}$$

1990 年吊桥方程由 A. C. Lazer 和 P. J. Mckenna[1] 作为非线性分析领域的新问题提出，该方程描述了吊桥路面在垂直平面内的震动．吊桥方程提出来之后，众多学者对该模型进行了许多相关研究．其中：Park

收稿日期：2021－02－14
基金项目：云南省教育厅科学研究基金资助项目（2020J0908）．
作者简介：吕鹏辉（1989—），男，福建龙岩人，讲师，主要从事非线性偏微分方程研究．
*通讯作者：吕小俊（1986—），男，内蒙古丰镇人，副教授，主要从事微分方程与动力系统研究，E-mail：15912469286@163.com.

等[2] 得到了非线性阻尼吊桥方程的整体吸引子的存在性；刘世芳等[3] 研究了带有历史记忆的阻尼吊桥方程的长时间行为，并通过利用收缩函数的方法，获得解在强拓扑空间下全局吸引子的存在性. 随着对该方程地研究深入，许多学者对各类吊桥方程的长时间性态进行了研究，如自治吊桥方程的整体吸引子[4-5]，维数估计[6-7]，吊桥方程的指数吸引子[8-9]，非自治吊桥方程的拉回吸引子[10-11] 等. Sine-Gordon 方程是波动方程中的一个重要模型，具有丰富的物理背景，对该类方程的长时间行为(包括整体吸引子、指数吸引子、维数估计等) 也有许多学者进行了研究，可参见文献[12—16] 及其他相关文献. 张建文等[12] 利用算子半群理论证明了在一定边界条件下系统存在连续解，并且由算子半群分解的方法构造出渐近紧的不变吸收集，进而得到系统整体吸引子的存在性.

有许多学者[17-19] 研究了 Kirchhoff 型吊桥方程的长时间动力学行为. 而有关 Sine-Gordon 型吊桥方程的研究相对甚少. 因此，本文在前人研究的基础上，根据吊桥方程和 Sine-Gordon 方程的特点，研究具强阻尼 Sine-Gordon 型吊桥方程吊桥的长时间动力学行为，包括在空间 $X = G_2 \times H$ 的整体吸引子的存在性，整体吸引子 A 的 Hausdorff 维数及分形维数有限.

1　预备知识及相关理论

为叙述方便，定义 Hilbert 空间 $G_s = D(A^{\frac{s}{4}})$，其内积和范数分别为：

$$(u, v)_s = (A^{\frac{s}{4}}u, A^{\frac{s}{4}}v), \ \|u\|_{G_s}^2 = \|A^{\frac{s}{4}}u\|^2,$$

当 $s = 0$ 时，记 $H = L^2(\Omega)$；当 $s = 2$ 时，记 $G_2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$，且其相应的内积和范数分别为：

$$(u, v)_H = (u, v), \ \|u\|_H^2 = \|u\|^2,$$

$$(u, v)_2 = (A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v), \ \|u\|_{G_2}^2 = \|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 = \|\Delta u\|^2.$$

用 $\|Au\|$ 表示 $D(A)$ 的范数，其中 $A = \Delta^2$. 显然：

$$G_4 \subset G_2 \subset H \subset G_{-2},$$

其中 G_{-2} 为 G_2 的共轭空间.

下面定义 Hilbert 空间，并赋予范数：

$$X = G_2 \times H, \ \|z\|_X = \|(u, u_t)\|_X = (\|\Delta u\|^2 + \|u_t\|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

下文中出现的 λ_1 为 $-\Delta$ 的第 1 特征值，C_i 为不同正常数，$C_i(\cdot, \cdot)$ 为依赖括号内的不同正常数. 为得到问题(1) ~ (3) 的长时间动力学行为，接下来给出相关理论.

引理 1[20-21]　若在 Banach 空间 X 中定义的一个连续半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 满足下列条件：

1) 存在一个有界吸收集 $B \subset X$，使得对任意有界集 $B_0 \subset X$，$\mathrm{dist}(S(t)B_0, B) \to 0 (t \to +\infty)$；

2) $S(t)$ 可分解为 $S(t) = P(t) + U(t)$，其中 $P(t)$ 是 $X \to X$ 的一个连续映射，且对每个有界集 $B_0 \subset X$，使得：

$$\sup_{\theta \in B_0} \|P(t)\theta\|_X \to 0, \ t \to \infty,$$

其中 $U(t)$ 对充分大的 t 是一致紧的，即对每个有界集 $B_0 \subset X$，存在 $T_0 = T_0(B_0)$，使得 $\bigcup_{t > T_0} S(t)B_0$ 在 X 中是相对紧的.

则连续半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 存在整体吸引子.

引理 2[20]　设半群 $S(t)$ 在整体吸引子 A 上是 Frechet 可微的，且存在时间 t_0，使得对所有的 $t > t_0$ 是紧的，若 $q_m < 0$，则整体吸引子 A 的 Hausdorff 维数和分形维数是有限的，其中，

$$q_m(t) = \sup_{\psi \in R_\varepsilon A} \sup_{\substack{\omega \in X \\ \|\omega\|_X \leqslant 1 \\ j=1,2,\cdots,m}} \left(\frac{1}{t} \int_0^t Trace(F'(\psi(\tau)) \circ Q_m(\tau)) \mathrm{d}\tau \right), \ q_m = \lim_{t \to \infty} q_m(t).$$

2　整体吸引子的存在性

定理 1　假定(H_1)：$f \in C'(R)$，且

$$\liminf_{|s|\to\infty}\frac{f(s)}{s}\geqslant-\lambda_1,\ F(s)=\int_0^s f(r)\mathrm{d}r,\ s\in R, \tag{4}$$

$$|f'(s)|\leqslant c_0(1+|s|^p),\ \forall s\in R,\ p\geqslant 1. \tag{5}$$

$$(\mathrm{H}_2):\quad g(s)\leqslant c_1(1+|s|^q),\ \forall s\in R,\ q\geqslant 1, \tag{6}$$

问题(1) ~ (3) 存在唯一整体解 $u\in L^\infty(0,+\infty;G_2)$, $u_t\in L^\infty(0,+\infty;H)$.

注:由假设(H_1)(4) 可知, 存在两个正常数 C_1, C_2 及 $\eta>0$, 使得:

$$f(s)s+\eta s^2+C_1\geqslant 0, F(s)+\eta s^2+C_2\geqslant 0. \tag{7}$$

证明 方程(1) 与 u_t 作 H 内积得到:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_1(t)+(g(\sin u),u_t)+\frac{3}{4}\|\nabla u_t\|^2\leqslant\frac{1}{\lambda_1}\|h\|^2, \tag{8}$$

其中
$$|(g(\sin u),u_t)|\leqslant\|g(\sin u)\|u_t\leqslant\frac{1}{\lambda_1}\|g(\sin u)\|^2+\frac{1}{4}\|\nabla u_t\|^2, \tag{9}$$

而
$$\|g(\sin u)\|^2=\int_\Omega g^2(\sin u)\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega c_1(1+|\sin u|^q)^2\mathrm{d}x\leqslant 2c_1|\Omega|,$$

$$\begin{aligned}E_1(t)&=\|u_t\|^2+\|\Delta u\|^2+k^2\|u^+\|^2+2\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x\\&\geqslant\kappa_1(\|u_t\|^2+\|\Delta u\|^2+k^2\|u^+\|^2)-2C_2|\Omega|.\end{aligned}$$

结合(8) 式和(9) 式, 得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_1(t)+\|\nabla u_t\|^2\leqslant\frac{2}{\lambda_1}\|h\|^2+4c_1|\Omega|. \tag{10}$$

由 Gronwall 不等式, 得:

$$\|u_t\|^2+\|\Delta u\|^2+k^2\|u^+\|^2+\int_0^t\|\nabla u(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant C(T),\ t\in[0,T]. \tag{11}$$

令 $v=u_t+\varepsilon u$, 则方程(1) 可写为:

$$v_t-\varepsilon v+\varepsilon^2u-\Delta v+\varepsilon\Delta u+\Delta^2u+k^2u^++g(\sin u)+f(u)=h(x), \tag{12}$$

方程(12) 与 v 作 H 内积得到:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_1(t)+\|\nabla v\|^2-\varepsilon\|v\|^2+\varepsilon^3\|u\|^2-\varepsilon^2\|\nabla u\|^2+\varepsilon\|\Delta u\|^2+\varepsilon k^2\|u^+\|^2+\varepsilon(f(u),u)\\&=(h,v)-(g(\sin u),v),\end{aligned} \tag{13}$$

其中
$$\begin{aligned}H_1(t)&=\|v\|^2+\varepsilon^2\|u\|^2+\|\Delta u\|^2-\varepsilon\|\nabla u\|^2+k^2\|u^+\|^2+2\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x\\&\geqslant C_3(\|v\|^2+\|u\|^2+\|\Delta u\|^2+k^2\|u^+\|^2)-2C_2|\Omega|.\end{aligned} \tag{14}$$

由假设条件得:

$$|(g(\sin u),v)|\leqslant\|g(\sin u)\|\|v\|\leqslant\frac{1}{\lambda_1}\|g(\sin u)\|^2+\frac{1}{4}\|\nabla v\|^2, \tag{15}$$

$$(h,v)\leqslant\frac{1}{\lambda_1}\|h\|^2+\frac{1}{4}\|\nabla v\|^2. \tag{16}$$

将(15) ~ (16) 式代入(13) 式得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_1(t)+K_1(t)\leqslant\frac{2}{\lambda_1}\|h\|^2+4c_1|\Omega|, \tag{17}$$

其中
$$\begin{aligned}K_1&=\|\nabla v\|^2-2\varepsilon\|v\|^2+2\varepsilon^3\|u\|^2-2\varepsilon^2\|\nabla u\|^2+2\varepsilon\|\Delta u\|^2+2\varepsilon k^2\|u^+\|^2+2\varepsilon(f(u),u)\\&\geqslant C_3(\|v\|^2+\|u\|^2+\|\Delta u\|^2+k^2\|u^+\|^2)-2\varepsilon C_1|\Omega|,\end{aligned} \tag{18}$$

即
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_1(t)+K_1(t)-\frac{2}{\lambda_1}\|h\|^2-4c_1|\Omega|\leqslant 0, \tag{19}$$

因此
$$H_1(t)\leqslant-\int_0^t\left(K_1(t)-\frac{2}{\lambda_1}\|h\|^2-4c_1|\Omega|\right)\mathrm{d}\tau+H_1(0), \tag{20}$$

所以，对 $\forall R_1 > 0$，存在 t_1，使得：

$$\|v(t_1)\|^2 + \|u(t_1)\|^2 + \|\Delta u(t_1)\|^2 + k^2\|u^+(t_1)\|^2 \leqslant R_1,$$

由此，可以得到 $G_2 \times H$ 的有界吸收集.

若 u 是方程(1) ~ (3) 的解，令 $B_1 = \bigcup_{t\geqslant 0} S(t)B_2$，其中，

$$B_2 = \{(u_0, u_1) \in G_2 \times H \mid \|u_1 + \varepsilon u_0\|^2 + \|u_0\|^2 + \|\Delta u_0\|^2 + k^2\|u_0^+\|^2 \leqslant R_1\},$$

则 B_1 是在 $G_2 \times H$ 中的有界吸收集.

设 $-\Delta w_j = \lambda_j w_j$，其中 λ_j 是特征值，$\{w_j\}$ 是对应特征值 λ_j 的特征元. 由特征值理论知 $\{w_j\}$ 构成 H 中的标准正交基，是 G_2 中的正交基. 设 $u^n(t) = \sum_{j=1}^{n} T_{jn} w_j$ 是方程(1) 的近似解，则 $u^n(t)$ 满足常微分方程组

$$\begin{cases}(u_{tt}^n, w_j) + (-\Delta u_t^n, w_j) + (\Delta^2 u^n, w_j) + (k^2 u^{+n}, w_j) + (g(\sin u^n), w_j) + (f(u^n), w_j) = (h, w_j),\\ u^n(0) = u_{0n},\ u_t^n(0) = u_{1n}.\end{cases} \tag{21}$$

其中 $j = 1, 2, \cdots, n$，当 $n \to \infty$ 时，在 $G_2 \times H$ 中，$(u_{0n}, u_{1n}) \to (u_0, u_1)$.

即有，$u_t^n \to u_t$ 在 $L^\infty(0, T; H)$ 弱 * 收敛，$u^n \to u$ 在 $L^\infty(0, T; G_1)$ 弱 * 收敛，$u_t^n \to u_t$ 在 $L^2(0, T; G_1)$ 弱 * 收敛.

对(21) 在 $(0, t)$ 上积分，则有：

$$(u_t^n, w_j) + \int_0^t(-\Delta u_t^n, w_j)\mathrm{d}\tau + \int_0^t(\Delta^2 u^n, w_j)\mathrm{d}\tau + \int_0^t(k^2 u^{+n}, w_j)\mathrm{d}\tau + (g(\sin u^n), w_j) + \int_0^t(f(u^n), w_j)\mathrm{d}\tau$$
$$= \int_0^t(h, w_j)\mathrm{d}\tau + (u_{1n}, w_j). \tag{22}$$

令 $n \to \infty$，则 $(u_t^n, w_j) \to (u_t, w_j)$，

$$\int_0^t(-\Delta u_t^n, w_j)\mathrm{d}\tau = \int_0^t(\nabla u_t^n, \nabla w_j)\mathrm{d}\tau \to \int_0^t(\nabla u_t, \nabla w_j)\mathrm{d}\tau = \int_0^t(-\Delta u_t, w_j)\mathrm{d}\tau,$$

$$\int_0^t(\Delta^2 u^n, w_j)\mathrm{d}\tau = \int_0^t(\Delta u^n, \Delta w_j)\mathrm{d}\tau \to \int_0^t(\Delta u, \Delta w_j)\mathrm{d}\tau = \int_0^t(\Delta^2 u, w_j)\mathrm{d}\tau,$$

$$\int_0^t(k^2 u^{+n}, w_j)\mathrm{d}\tau \to \int_0^t(k^2 u^+, w_j)\mathrm{d}\tau,$$

$$|g(\sin u^n) - g(\sin u)| \leqslant 3c_1|u^n - u|,$$

$$\left|\int_0^t(g(\sin u^n) - g(\sin u), w_j)\mathrm{d}\tau\right| \leqslant 3c_1\int_0^t\|u^n - u\|\|w_j\|\mathrm{d}\tau \leqslant 3c_1\int_0^t\|u^n - u\|\mathrm{d}\tau \to 0,$$

$$\left|\int_0^t(f(u^n) - f(u), w_j)\mathrm{d}\tau\right| \leqslant c_0\int_0^t\|u^n - u\|\|w_j\|\mathrm{d}\tau + c_0\int_0^t\|u^n + \theta(u^n - u)\|_{V_1}^{p-1}\|u^n - u\|_{V_1}\|w_j\|\mathrm{d}\tau \to 0,$$

即有：

$$(u_t, w_j) + \int_0^t(-\Delta u_t, w_j)\mathrm{d}\tau + \int_0^t(\Delta^2 u, w_j)\mathrm{d}\tau + \int_0^t(k^2 u^+, w_j)\mathrm{d}\tau + (g(\sin u), w_j) + \int_0^t(f(u), w_j)\mathrm{d}\tau$$
$$= \int_0^t(h, w_j)\mathrm{d}\tau + (u_{1n}, w_j),$$

两边对 t 求导，再由 w_j 在 G_2 中的稠密性知：

$$u_{tt} - \Delta u_t + \Delta^2 u + k^2 u^+ + g(\sin u) + f(u) = h(x),$$

即

$$u \in L^\infty(0, T; G_2),\ u_t \in L^\infty(0, T; H) \cap u \in L^2(0, T; G_1).$$

接下来，证明解的唯一性.

令 $u(t)$，$v(t)$ 是方程(1) ~ (3) 对应于初值 (u_0, u_1)，(v_0, v_1) 的两个解，则 $w(t) = u(t) - v(t)$ 满足：

$$w_{tt} - \Delta w_t + \Delta^2 w + g(\sin u) - g(\sin v) + f(u) - f(v) + k^2(u^+ - v^+) = 0, \tag{23}$$

(23) 式与 w_t 作 H 内积得：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|w_t\|^2 + \|\Delta w\|^2) + \|\nabla w_t\|^2 = (\varphi(u, v), w_t)$$

$$= (k^2(v^+ - u^+) + g(\sin v) - g(\sin u) + f(v) - f(u), w_t). \tag{24}$$

根据假设条件、Holder 不等式、Young 不等式和 Poincare 不等式，得：

$$k^2(v^+ - u^+, w_t) \leqslant k^2\|v^+ - u^+\|\|w_t\| \leqslant k^2L\|v - u\|\|w_t\| \leqslant \frac{k^4L^2}{4\lambda_1^2}\|\Delta w\|^2 + \|w_t\|^2, \tag{25}$$

$$|g(\sin v) - g(\sin u)| \leqslant 6c_1\left|\cos\frac{v+u}{2}\right|\left|\sin\frac{v-u}{2}\right| \leqslant 3c_1|v-u|,$$

$$(g(\sin v) - g(\sin u), w_t) \leqslant C_1(R_1)(\|\Delta w\|^2 + \|w_t\|^2), \tag{26}$$

$$|(f(v) - f(u), w_t)| \leqslant C_2(R_1)(\|\Delta w\|^2 + \|w_t\|^2). \tag{27}$$

将(25) ~ (27) 式代入(24) 式，得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|w\|^{22} + \|\Delta w\|^2) + 2\|\nabla w\|^2 \leqslant C_4(\|w\|^2 + \|\Delta w\|^2). \tag{28}$$

运用Gronwall不等式可得解的唯一性,则解的唯一性证明完毕. 此外，由定理1，则 B_1 是半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在 X 中的有界吸收集，从而有下列定理.

定理2 在定理1假设条件下，则球 $B_1 = B_X(0, R_1)$ 是问题(1) ~ (3) 生成的解半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在 X 中的有界吸收集，即对 X 中任意有界集 B，存在 $t_1 = t_1(B)$，使得当 $t \geqslant t_1(B)$ 时，有 $S(t)B \subset B_1$.

注:在定理1 假设条件下，对任意 $R > 0$ 和初值 $z_0 = (u_0, u_1)$，存在 $t_1 = t_1(R)$，当 $\|z_0\| \leqslant R$ 时，$\|S(t)z_0\|_X \leqslant R_1$，$\forall t \geqslant t_1$ 成立.

接下来，为得到整体吸引子，将解半群进行分解，具体如下：

设 $u = v + z$，其中：

$$z_{tt} - \Delta z_t + \Delta^2 z = 0,\ z(0) = u_0,\ z_t(0) = u_1; \tag{29}$$

$$v_{tt} - \Delta v_t + \Delta^2 v = h - f(u) - g(\sin u) - k^2u^+ := \varphi,\ v(0) = 0,\ v_t(0) = 0. \tag{30}$$

引理3 如果 $(u_0, u_1) \in B$，(z, z_t) 是(29) 式的解，则

$$\|z_t\|^2 + \|\Delta z\|^2 \leqslant R(t),\ t \geqslant 0,$$

且

$$R(t) \to 0,\ 当\ t \to +\infty.$$

证明 (29) 式分别与 z_t，εz 作 H - 内积，得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|z_t\|^2 + \|\Delta z\|^2 + \varepsilon(z_t, z) + \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla z\|^2) + \varepsilon\|\Delta z\|^2 - \varepsilon\|z_t\|^2 + 2\|\nabla z_t\|^2 = 0. \tag{31}$$

由定理1 假设条件，则存在正常数 κ，ρ，使得：

$$H_2(t) = \|z_t\|^2 + \|\Delta z\|^2 + \varepsilon(z_t, z) + \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla z\|^2 \leqslant \frac{1}{\rho}(\|z_t\|^2 + \|\Delta z\|^2), \tag{32}$$

$$\|z_t\|^2 + \|\Delta z\|^2 + \varepsilon(z_t, z) + \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla z\|^2 \geqslant \frac{1}{2}\|z_t\|^2 + \|\Delta z\|^2 + (\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2\lambda_1})\|\nabla z\|^2, \tag{33}$$

$$\varepsilon\|\Delta z\|^2 - \varepsilon\|z_t\|^2 + \|\nabla z_t\|^2 \geqslant (\lambda_1 - \varepsilon)\|z_t\|^2 + \|\Delta z\|^2 \geqslant \kappa\rho H_2(t), \tag{34}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_2(t) + \kappa\rho H_2(t) + \|\nabla z_t\|^2 \leqslant 0. \tag{35}$$

通过 Gronwall 不等式得到：

$$\|z_t\|^2 + \|\Delta z\|^2 \leqslant 2H_2(0)\mathrm{e}^{-\kappa\rho t}. \tag{36}$$

引理3 结论证明完毕.

引理4 如果$(u_0, u_1) \in B$，(v, v_t) 为(30) 式的解，则存在紧集 $N(T) \subset X$ 且$(v, v_t) \in N(T)$.

证明 对(30) 式两边同时乘以算子 $A^{1/4}$，得到：

$$\xi_{tt} - \Delta\xi_t + \Delta^2\xi = A^{1/4}\varphi,\ \xi(0) = 0,\ \xi_t(0) = 0, \tag{37}$$

其中 $\xi = A^{1/4}v$. 令 $\eta = \xi_t + \varepsilon\xi$，则

$$\eta_t - \varepsilon\eta + \varepsilon^2\xi - \Delta\eta + \varepsilon\Delta\xi + \Delta^2\xi = A^{1/4}\varphi, \tag{38}$$

(38) 式中的方程与 η 作 H - 内积，得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\eta\|^2+\varepsilon^2\|\xi\|^2-\varepsilon\|\nabla\xi\|^2+\|\Delta\xi\|^2)+\|\nabla\eta\|^2-2\varepsilon\|\eta\|^2+2\varepsilon^3\|\xi\|^2-2\varepsilon^2\|\nabla\xi\|^2+2\varepsilon\|\Delta\xi\|^2\leqslant\|\varphi\|^2,\tag{39}$$

由定理 1 假设条件，得：

$$\|\eta\|^2+\varepsilon^2\|\xi\|^2-\varepsilon\|\nabla\xi\|^2+\|\Delta\xi\|^2\geqslant\|\eta\|^2+\varepsilon^2\|\xi\|^2+\left(1-\frac{\varepsilon}{\lambda_1}\right)\|\Delta\xi\|^2\geqslant\|\eta\|^2+\varepsilon^2\|\xi\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta\xi\|^2,\tag{40}$$

$$\|\nabla\eta\|^2-2\varepsilon\|\eta\|^2+2\varepsilon^3\|\xi\|^2-2\varepsilon^2\|\nabla\xi\|^2+2\varepsilon\|\Delta\xi\|^2\geqslant\varepsilon(\|\eta\|^2+\varepsilon^2\|\xi\|^2-\varepsilon\|\nabla\xi\|^2+\|\Delta\xi\|^2),\tag{41}$$

$$\|\varphi\|^2=\|h-f(u)-g(\sin u)-k^2u^+\|^2\leqslant\|h\|^2+\|f(u)\|^2+\|g(\sin u)\|^2+\|k^2u^+\|^2\leqslant C_4(R_1),\tag{42}$$

结合(40) ~ (42) 式，得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\eta\|^2+\varepsilon^2\|\xi\|^2-\varepsilon\|\nabla\xi\|^2+\|\Delta\xi\|^2)+\varepsilon(\|\eta\|^2+\varepsilon^2\|\xi\|^2-\varepsilon\|\nabla\xi\|^2+\|\Delta\xi\|^2)\leqslant C_4(R_1),\tag{43}$$

则

$$H_3(t)\leqslant H_3(0)\mathrm{e}^{-\varepsilon t}+\frac{C_4(R_1)}{\varepsilon},\tag{44}$$

其中 $H_3(t)=\|\eta\|^2+\varepsilon^2\|\xi\|^2-\varepsilon\|\nabla\xi\|^2+\|\Delta\xi\|$. 由 $H_3(0)=0$，随后得到：

$$\|(v,v_t)\|^2_{G_3\times G_1}\leqslant C_6,\ t>0.\tag{45}$$

根据 $G_3\times G_1\to X$ 是紧嵌入的，则得到 $G_3\times G_1$ 的有界集是 X 的紧集. 引理 4 结论证明完毕.

定理3　在定理1的假设条件下，由问题(1) ~ (3) 生成的连续解半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant0}$ 在 X 中存在紧的整体吸引子.

证明　定义 $P(t)(u_0,u_1)=(z(t),z_t(t))$，$U(t)(u_0,u_1)=(v(t),v_t(t))$.

显然，$S(t)=P(t)+U(t)$. 引理 3 表明任意的 $(u_0,u_1)\in B\subset X$，算子 $P(t):X\to X$ 是连续的，并且满足引理 1 的 2). 同时，引理 4 表明 $U(t)$ 是一致紧的. 再由定理 2，存在有界吸收集，所以 $\{S(t)\}_{t\geqslant0}$ 在 X 中具有紧的整体吸引子. 定理 3 证毕.

3　整体吸引子的维数估计

定理4　在定理1假设条件下，问题(1) ~ (3) 生成的整体吸引子 A 的 Hausdorff 维数、分形维数有限.

证明　问题(1) ~ (3) 形式上的线性化方程为：

$$U_{tt}-\Delta U_t+\Delta^2U+k^2U_t+g'(\sin u)\cos u\cdot U+f'(u)U=0,\ U(0)=\xi,\ U_t(0)=\zeta.\tag{46}$$

第 1 步　证明变分方程解的存在性，方法类似于证明整体解的存在性，并结合定理 1 可知存在唯一解 U，且 $(U,U_t)\in L^\infty(R^+,G_2\times H)$.

第 2 步　证明 $S(t)$ 在 A 上是一致可微的.

定义 $L(t,\varphi_0):G_2\times H\to G_2\times H$，$L(t,\varphi_0)(\xi,\zeta)=(U,U_t)$，$\varphi_0\in A$，则

$$L(t,\varphi_0)=DS(t)\varphi_0,$$

证明 $S(t)$ 在 $X=G_2\times H$ 上的有界集上是 Lipschitz 连续.

令 $\varphi_0=(u_0,u_1)$，$\tilde\varphi_0=(u_0+\xi,u_1+\zeta)=\varphi_0+(\xi,\zeta)$，且 $\|\varphi_0\|_X\leqslant R$，$\|\tilde\varphi_0\|_X\leqslant R$，

有

$$S(t)\varphi_0=\varphi(t)=(u(t),u_t(t)),\ S(t)\tilde\varphi_0=\tilde\varphi(t)=(\tilde u(t),\tilde u_t(t)).$$

由上文整体吸引子的结果，原方程在相空间 $X=G_2\times H$ 上有有界吸收集，即 $\|\varphi_0\|_X\leqslant R$，$\|\tilde\varphi_0\|_X\leqslant R$ 时，

$$\|S(t)\varphi_0\|\leqslant C(R),\ \|S(t)\tilde\varphi_0\|\leqslant C(R).$$

令 $\varphi=\tilde u-u$，则 φ 满足：

$$\varphi_{tt}-\Delta\varphi_t+\Delta^2\varphi+k^2(\tilde u^+-u^+)+g(\sin\tilde u)-g(\sin u)+f(\tilde u)-f(u)=0,$$
$$\varphi(0)=\xi,\ \varphi_t(0)=\zeta,\tag{47}$$

在(47) 两端用 φ_t 作 H 内积，得：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\varphi_t\|^2+\|\Delta\varphi\|^2)+\|\nabla\varphi_t\|^2=-(k^2(\tilde u^+-u^+)+g(\sin\tilde u)-g(\sin u)+f(\tilde u)-f(u),\varphi_t),\tag{48}$$

$$|(f(\tilde{u})-f(u),\varphi_t)|\leqslant\int_\Omega|f'(\tilde{u}+\theta(\tilde{u}-u))|\cdot|\varphi|\cdot|\varphi_t|\mathrm{d}x\leqslant C(R)(\|\varphi_t\|^2+\|\Delta\varphi\|^2),\tag{49}$$

$$|(g(\sin\tilde{u})-g(\sin u),\varphi_t)|\leqslant C(R)(\|\varphi_t\|^2+\|\Delta\varphi\|^2),\tag{50}$$

$$|(k^2(\tilde{u}^+-u^+),\varphi_t)|\leqslant C(R)(\|\varphi_t\|^2+\|\Delta\varphi\|^2).\tag{51}$$

将(49) ~ (51) 式代入(48) 式，则有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\varphi_t\|^2+\|\Delta\varphi\|^2)+\|\nabla\varphi_t\|^2\leqslant C(R)(\|\varphi_t{}^2+\Delta\varphi^2).\tag{52}$$

由 Gronwall 不等式，得到：

$$\|\varphi_t\|^2+\|\Delta\varphi\|^2\leqslant C(R,T)(\|\varphi_1\|^2+\|\Delta\varphi_0\|^2)=C(R,T)(\|\zeta\|^2+\|\Delta\xi\|^2),$$

即

$$\|S(t)\tilde{\varphi}_0-S(t)\varphi_0\|_X^2\leqslant C(R,T)\|\tilde{\varphi}_0-\varphi_0\|_X^2.$$

令 $\vartheta=\varphi-U$，则 ϑ 满足：

$$\vartheta_{tt}-\Delta\vartheta_t+\Delta^2\vartheta+g'(\sin u)\cos u\cdot\vartheta+f'(u)\vartheta=F,\tag{53}$$

其中，$F=g(\sin u)-g(\sin\tilde{u})-g'(\sin u)\cos u\cdot(u-\tilde{u})+f(u)-f(\tilde{u})-f'(u)(u-\tilde{u})-k^2(\tilde{u}^+-u^+)-k^2U^+$.

对(53) 两端用 ϑ_t 作 H 内积，则有：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\vartheta_t\|^2+\|\Delta\vartheta\|^2)+\|\nabla\vartheta_t^2\|+(g'(\sin u)\cos u\cdot\vartheta,\vartheta_t)+(f'(u)\vartheta,\vartheta_t)=(F,\vartheta_t),\tag{54}$$

$$|(g'(\sin u)\cos u\cdot\vartheta,\vartheta_t)|\leqslant C(R)(\|\vartheta_t\|^2+\|\Delta\vartheta\|^2),$$

$$|(f'(u)\vartheta,\vartheta_t)|\leqslant C(R)(\|\vartheta_t\|^2+\|\Delta\vartheta\|^2),$$

记 $h_1=f(u)-f(\tilde{u})-f'(u)(u-\tilde{u})\leqslant\int_0^1(1+|su+(1-s)\tilde{u}|^{p-1}+|u|^{p-1})\mathrm{d}s(u-\tilde{u})^2$,

$h_2=g(\sin u)-g(\sin\tilde{u})-g'(\sin u)\cos u\cdot(u-\tilde{u})\leqslant C|u-\tilde{u}|^2$.

由于 $|(F,\vartheta_t)|\leqslant|(h_1,\vartheta_t)|+|(h_2,\vartheta_t)|+|(k^2(u^+-\tilde{u}^+-U^+),\vartheta_t)|$,

则有

$$|(h_1,\vartheta_t)|\leqslant\|h_1\|\|\vartheta_t\|\leqslant\frac{1}{8}\|\nabla\vartheta_t\|^2+C(R)\|\Delta(u-\tilde{u})\|^4,\tag{55}$$

$$|(h_2,\vartheta_t)|\leqslant\|h_2\|\|\vartheta_t\|\leqslant\frac{1}{8}\|\nabla\vartheta_t\|^2+C(R)\|\Delta(u-\tilde{u})\|^4,\tag{56}$$

$$|(k^2(\tilde{u}^+-u^+-U^+),\vartheta_t)|\leqslant k^2\|\tilde{u}^+-u^+-U^+\|\|\vartheta_t\|\leqslant C\|\vartheta\|\|\vartheta_t\|\leqslant C(R)(\|\vartheta_t\|^2+\|\Delta\vartheta\|^2).\tag{57}$$

将(55) ~ (57) 式代入(54) 式，则有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\vartheta_t\|^2+\|\Delta\vartheta\|^2)+\|\nabla\vartheta_t\|^2\leqslant C(R)[\|\vartheta_t\|^2+\|\Delta\vartheta\|^2+\|\Delta(\tilde{u}-u)\|^4].\tag{58}$$

由 Gronwall 不等式知：

$$\|\vartheta_t\|^2+\|\Delta\vartheta\|^2\leqslant C(R,T)(\|\xi\|^2+\|\Delta\zeta\|^2)^2,$$

即有

$$\frac{\|\tilde{\varphi}(t)-\varphi(t)-U(t)\|_X^2}{\|(\xi,\zeta)\|_X^2}\leqslant C(R,T)(\|\xi\|^2+\|\Delta\zeta\|^2),$$

所以，对任一 t，当 $(\xi,\zeta)\to0$ 时，有：

$$\frac{\|\tilde{\varphi}(t)-\varphi(t)-U(t)\|_X^2}{\|(\xi,\zeta)\|_X^2}\to0,$$

即得到 $S(t)$ 在 A 上是 Frechet 可微的.

第 3 步 整体吸引子 A 的 Hausdorff 维数、分形维数有限.

首先把方程(1) ~ (3) 写成在空间 X 上的一阶抽象发展方程. 令 $\psi=(u,u_t+\varepsilon u)^T$，则 ψ 满足

$$\psi_t+\Lambda_\varepsilon\psi+G(\psi)=0,\ \psi(0)=(u_0,u_1+\varepsilon u_0)^T,\tag{59}$$

其中

$$G(\psi)=(0,h(x)-k^2u^+-g(\sin u)-f(u))^T,$$

$$\Lambda_\varepsilon=\begin{pmatrix}\varepsilon I & -I\\ \Delta^2-\varepsilon\Delta-\varepsilon^2I & -\Delta-\varepsilon I\end{pmatrix},$$

其中 I 为恒等算子.

记 $\{S_\varepsilon(t)\}$ 为由(59)式生成的群，则对 $\varphi_0=(u_0,u_1)^T\in X$，$S_\varepsilon(t)\varphi_0=R_\varepsilon S(t)R_{-\varepsilon}\varphi_0$，其中 R_ε 是 X 中的一个同构 $R_\varepsilon:(u,u_t)\to(u,u_t+\varepsilon u)$.

所以，记 A 为 $\{S(t)\}$ 的整体吸引子，则 $R_\varepsilon A$ 为 $\{S_\varepsilon(t)\}$ 的整体吸引子，且它们有相同的维数. 现估计 $R_\varepsilon A$ 的维数. 而(59)式的一阶变分方程为：

$$\Psi_t=-\Lambda_\varepsilon\Psi-G'(\psi)\Psi\equiv F'(\psi)\Psi, \tag{60}$$

其中，$\Psi=(U,U_t+\varepsilon U)^T$，$G'(\psi)\Psi=(0,-k^2U^+-g'(\sin u)\cos u\cdot U-f'(u)U)^T$，初始条件为：

$$\Psi(0)=\omega=(\xi,\xi_t+\varepsilon\xi)^T\in X. \tag{61}$$

设 $\Psi_1(\tau),\Psi_2(\tau),\cdots,\Psi_m(\tau)$ 为(60)～(61)式分别对应于初值 $\omega_1(\tau),\omega_2(\tau),\cdots,\omega_m(\tau)$，$\omega_i\in X$ 的解，并记 $\Phi_j(\tau)=(\xi_j,\zeta_j)^T$，$j=1,2,\cdots,m$ 为空间 $Q_m(\tau)E_0=span\{\Phi_1(\tau),\Phi_2(\tau),\cdots,\Phi_m(\tau)\}$ 的一组标准正交基，则：

$$Trace(F'(\psi(\tau))\circ Q_m(\tau))=\sum_{j=1}^m(F'(\psi(\tau))\Phi_j(\tau),\Phi_j(\tau))_X,$$

由于 $(F'(\psi(\tau))\Phi_j(\tau),\Phi_j(\tau))_X=-(\Lambda_\varepsilon\Phi_j(\tau),\Phi_j(\tau))_X+(k^2\xi_j^++g'(\sin u)\cos u\cdot\xi_j+f'(u)\xi_j,\zeta_j)$，而 $(\Lambda_\varepsilon\Phi_j(\tau),\Phi_j(\tau))_X=\varepsilon\|\Delta\xi_j\|^2+\|\nabla\zeta_j\|^2-\varepsilon\|\zeta_j\|^2-\varepsilon(\Delta\xi_j,\zeta_j)-\varepsilon^2(\xi_j,\zeta_j)\geqslant\alpha_1(\|\Delta\xi_j\|^2+\|\zeta_j\|^2)$.

根据引理 3，存在 $M>0$，$\alpha\geqslant0$，使得：

$$\|P(t)\varphi\|_X\leqslant Me^{-\alpha t},\ \forall\varphi\in A,\ t\geqslant0. \tag{62}$$

根据引理 4，存在常数 $c>0$，使得：

$$U(t,\varphi)_{G_{2+\delta}\times G_\delta}\leqslant c,\ \forall\varphi\in A,\ t\geqslant0,\ 0<\delta\ll1, \tag{63}$$

$$\|f'(u)\xi_j\|^2\leqslant C(e^{-\alpha t}+1)\|\nabla\xi_j\|^2, \tag{64}$$

因此，根据(62)～(64)式，得到：

$$\|k^2\xi_j^++g'(\sin u)\cos u\cdot\xi_j+f'(u)\xi_j\|^2\leqslant C(e^{-\alpha t}+1)\|\nabla\xi_j\|^2.$$

综合上述，得到：

$$(F'(\psi(\tau))\Phi_j(\tau),\Phi_j(\tau))_X\leqslant-\frac{\alpha_1}{2}(\|\Delta\xi_j\|^2+\|\zeta_j\|^2)+\frac{C^2}{2\alpha_1}(e^{-\alpha t}+1)\|\nabla\xi_j\|^2.$$

由于 $\|\Delta\xi_j\|^2+\|\zeta_j\|^2=1$，所以

$$\sum_{j=1}^m(F'(\psi(\tau))\Phi_j(\tau),\Phi_j(\tau))_X\leqslant-\frac{m\alpha_1}{2}+\frac{C^2}{2\alpha_1}(e^{-\alpha t}+1)\cdot\sum_{j=1}^m\|\nabla\xi_j\|^2.$$

另外，有：

$$\sum_{j=1}^m\nabla\xi_j{}^2\leqslant\sum_{j=1}^m\lambda_j^{-\frac12},$$

其中 λ_j，$j=1,2,\cdots,m$ 为 $-\Delta$ 的前个特征值，所以

$$Trace(F'(\psi(\tau))\circ Q_m(\tau))\leqslant-\frac{m\alpha_1}{2}+\frac{C^2}{2\alpha_1}(e^{-\alpha t}+1)\sum_{j=1}^m\lambda_j^{-\frac12},$$

有

$$q_m(t)=\sup_{\psi\in R_\varepsilon A}\ \sup_{\substack{\omega\in X\\ \|\omega\|_X\leqslant1\\ j=1,2,\cdots,m}}\left(\frac1t\int_0^tTrace(F'(\psi(\tau))\circ Q_m(\tau))d\tau\right)\leqslant-\frac{m\alpha_1}{2}-\frac{C^2e^{-\alpha t}}{2\alpha_1\alpha t}\sum_{j=1}^m\lambda_j^{\theta-1},$$

即

$$q_m=\lim_{t\to\infty}q_m(t)\leqslant-\frac{m\alpha_1}{2}-\frac{C^2}{2\alpha_1}\sum_{j=1}^m\lambda_j^{\theta-1}. \tag{65}$$

由于 $\lambda_j\to\infty\ (j\to\infty)$，所以当 $m\to\infty$ 时，$\frac{C^2}{2\alpha_1m}\sum_{j=1}^m\lambda_j^{\theta-1}\to0$. 根据(65)式，存在 $m>0$，使得：

$$q_m<0. \tag{66}$$

根据文献[22]可得，$R_\varepsilon A$ 的 Hausdorff 维数($\dim_H$)和分形维数($\dim_f$)分别满足：

$$\dim_H(R_\varepsilon A)\leqslant m,\ \dim_f(R_\varepsilon A)\leqslant2m,$$

这里的 m 由(66) 决定，所以

$$\dim_H(A) \leqslant m,\ \dim_f(A) \leqslant 2m,$$

证毕.

[参考文献]

[1] LAZER A C，MCKENNA P J. Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridge：some new connections with nonlinear analysis [J]. SIAM Review，1990，32 (4)：537 - 578.

[2] PARK J Y，KANG J R. Global attractors for the suspension bridge equations with nonlinear damping [J]. Quarterly of Applied Mathematics，2011，69 (3)：465 - 475.

[3] 刘世芳，马巧珍. 具有历史记忆的阻尼吊桥方程强全局吸引子的存在性 [J]. 数学物理学报，2017，37 (4)：684 - 697.

[4] 马巧珍，张翠. 无界区域 R 上吊桥方程的全局吸引子 [J]. 西北师范大学学报 (自然科学版)，2014，50 (6)：1 - 4.

[5] 黄商商，马巧珍. 带线性记忆的阻尼耦合吊桥方程的全局吸引子 [J]. 华东师范大学学报 (自然科学版)，2018 (2)：11 - 22.

[6] 严建军，姜金平，张凤，等. 吊桥方程全局吸引子的维数估计 [J]. 贵州大学学报 (自然科学版)，2017，34 (1)：13 - 17.

[7] 李惠，蒲志林，陈光淦. 非自治吊桥方程的一致吸引子及其维数估计 [J]. 四川师范大学学报 (自然科学版)，2009，32 (5)：557 - 563.

[8] WANG W T，MA Q Z. The existence of exponential attractors for the suspension bridge equation [J]. Acta Anal Funct Appl，2016，18 (2)：212 - 219.

[9] LUO X D. The existence of exponential attractors for coupled suspension bridge equations [J]. Journal of Southwest University (Natural Science Edition)，2017，39 (9)：102 - 106.

[10] WANG F P，MA Q Z. Existence of pullback attractors for weakly damped suspension bridge equations with linear memory [J]. Journal of Jilin University (Science Edition)，2018，56 (6)：1307 - 1314.

[11] YONG H X，MA Q Z，CHANG Y Y. Existence of pullback attractors for Non-autonomous suspension bridge equations [J]. Journal of Sichuan University (Natural Science)，2015，52 (2)：255 - 261.

[12] 张建文，任永华，吴润衡，等. 非线性热弹耦合 Sine-Gordon 型系统的整体吸引子 [J]. 物理学报，2012，61 (11)：117 - 121.

[13] TANG Q L，LI F Z，LI Y R. D-pullback attractors for a class of non-autonomous stochastic damped Sine-Gordon equations [J]. Journal of Southwest University (Natural Science Edition)，2018，40 (6)：101 - 108.

[14] FENG Y H，WANG W G，MO J Q. A class of nonlinear generalized strong damping time delay disturbed Sine-Gordon equation initial value problem [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics，2019，36 (2)：179 - 186.

[15] 杨爽，王仁海，李扬荣，等. 非自治随机 Sine-Gordon 方程组的拉回动力行为 [J]. 西南大学学报 (自然科学版)，2018，40 (2)：70 - 77.

[16] 李焕，林国广. 带阻尼 Sine-Gordon 方程解的长时间性态 [J]. 云南大学学报 (自然科学版)，2010，32 (S1)：305 - 309.

[17] LAN J，MA Q Z. The existence of exponential attractors for strong damped Kirchhoff-type Suspension bridge equations [J]. Scientia Sinica，2018，48 (7)：909 - 922.

[18] JIA L，MA Q Z. The existence of exponential attractors for the Kirchhoff-Type Suspension bridge equations [J]. Journal of Sichuan University (Natural Science)，2018，41 (2)：185 - 189.

[19] WANG X P，YONG H X，WANG W T. Existence of Pullback attractors for Non-autonomous Kirchhoff-type Suspension bridge equations with a strong damping [J]. Journal of Henan University (Natural Science)，2017，47 (2)：240 - 246.

[20] 林国广. 非线性演化方程 [M]. 昆明：云南大学出版社，2011.

[21] YANG Z J，JIN B X. Global attractor for a class of Kirchhoff models [J]. J Math Phys，50 (3)：701 - 730.

[22] HUANG Y. Estimate of the hausdorff and fractal dimensions of the global attractors for nonlinear wave equations with damping [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica，1998，21 (2)：257 - 266.