昆明学院学报　2021，43（6）：56～73　ISSN 1674－5639　CN 53－1211/G4
Journal of Kunming University

图的电阻距离和基尔霍夫指标综述

葛春雨[1]，刘家保[2*]
（1. 兰州交通大学 数理学院，甘肃 兰州 730070；2. 安徽建筑大学 数理学院，安徽 合肥 230601）

摘要：图的基尔霍夫指标是指图中所有无序点对之间的电阻距离之和，其在物理、化学、生态学、网络科学等方面都有广泛的应用. 因此，通过查阅大量国内外文献，根据图类介绍图的基尔霍夫指标、加法度－基尔霍夫指标和乘法度－基尔霍夫指标范围得到其极值图，并阐述基尔霍夫指标与图的（拟）拉普拉斯能量的关系，同时探讨了计算一般图的基尔霍夫指标的局限性以及未来有待研究的问题.

关键词：电阻距离；基尔霍夫指标；度基尔霍夫指标；运算图
中图分类号：O157.5　**文献标识码：**A　**文章编号：**1674－5639（2021）06－0056－18
DOI：10.14091/j.cnki.kmxyxb.2021.06.010

A Review of Resistance Distances of Graphs and Kirchhoff Index

GE Chunyu[1]，LIU Jiabao[2*]
（1. Department of Mathematics，Lanzhou Jiaotong University，Lanzhou，Gansu，China　730070；
2. School of Mathematics and Physics，Anhui University of Architecture，Hefei，Anhui，China　230601）

Abstract：Kirchhoff index of graphs refers to the sum of resistance distances between all disordered point pairs in the graph，which has a wide range of applications in physics，chemistry，ecology，network science and other aspects. Therefore，through the study of extensive domestic and foreign literature，according to the graph class，Kirchhoff index，additive degree-Kirchhoff index and multiplication degree-Kirchhoff index range of graph，their extreme value graph is obtained. The index of Kirchhoff's relationship with the figure of Laplace energy（-like）is stated，at the same time the graphs generally calculate the index of Kirchhoff's limitations are studied and problems to be studied in the future.

Key words：resistance distances；Kirchhoff index；degree-Kirchhoff index；operation graph

0　引言

设图 $G=(V(G),E(G))$ 为 $n(n\geqslant 2)$ 个顶点 m 条边的连通图，顶点度序列 $\Delta=d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_n=\delta>0$，其中 $d_i=d_{v_i}$. 图 G 的拉普拉斯矩阵 $L(G)=D(G)-A(G)$，其特征值 $\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_{n-1}>\mu_n=0$，其中 $D(G)$ 和 $A(G)$ 分别是图 G 的对角矩阵和邻接矩阵. 若图 G 中每个顶点的度相等，则称 G 是正则图；若图 G 中所有顶点的度均为 r，则称 G 为 r- 正则图，记作 Γ_r.

电阻距离是图上的一个距离函数，在图和弹簧网络的随机游动中起着重要的作用. 1993 年，Klein 和 Randić[1] 首次提出图的电阻距离（Resistance distance），以及基尔霍夫指标（Kirchhoff index）的概念. 连通图 G 中任意两点 i,j 之间的电阻距离 $r_{ij}(G)$，是将图上的每条边都等同于一个单位电阻之后这两点间的有效电阻，而有效电阻可根据欧姆定律和基尔霍夫定律计算得出.

收稿日期：2021－10－10
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11561042）.
作者简介：葛春雨（1996—），女，安徽亳州人，硕士研究生，主要从事代数图论研究.
*通信作者：刘家保（1982—），男，安徽六安人，教授，博士，曾荣获安徽省杰出青年基金，主要从事图论及其应用研究，E-mail：liujiabaoad@163.com.

基尔霍夫指标，记作 $Kf(G)$，也被称为全有效电阻[2] 或有效图电阻[3]. 它定义为图 G 中所有顶点对的电阻距离之和，即

$$Kf(G) = \sum_{i<j} r_{ij}(G).$$

图的基尔霍夫指标是一个与图的拉普拉斯特征值密切相关的图的拓扑不变量. 1996 年，Gutman 等[4] 和 Klein 等[5] 证明了连通图 G 的基尔霍夫指标也可以表示为：

$$Kf(G) = \sum_{i<j} r_{ij}(G) = n\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\mu_i},$$

其中 $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_{n-1} > \mu_n = 0$ 为图 G 的拉普拉斯矩阵的特征值.

近几十年来，对更多图形的电阻距离和基尔霍夫指标的研究越来越多，如距离正则图、Fullerene 图、树图、加权图、轮图和扇形图、Cayley 图等. 特别地，杨玉军和 Klein[6] 在 2013 年给出了电阻距离的递推公式以及该公式的应用.

随着研究的深入，结合顶点的度，又进一步衍生出度 - 基尔霍夫指标. 2007 年，陈海燕和张福基[7] 定义了乘法度 - 基尔霍夫指标：

$$Kf^*(G) = \sum_{i<j} d_i d_j r_{ij}(G),$$

其中 $d_i(d_j)$ 表示第 $i(j)$ 个顶点的度.

2012 年，Gutman 等[8] 定义了加法度 - 基尔霍夫指标：

$$Kf^+(G) = \sum_{i<j} (d_i + d_j) r_{ij}(G).$$

2011 年，文献[9] 定义了图 G 的超 - 基尔霍夫指标：

$$KK(G) = \frac{1}{2}\sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} (r(u,v) + r^2(u,v)).$$

图 G 的线图记作 $l(G)$，是指以图 G 的边集为顶点集，$l(G)$ 的两个顶点相邻当且仅当对应的 G 的两条边在 G 中相邻. 图 G 的三角剖分记作 $T(G)$，是将 G 的每条边 uv 变换成一个三角形 uwv，其中 w 是与 uv 相关联的新顶点.

下面给出图的一些运算的定义.

定义 1　设图 G 为 $n(n \geqslant 2)$ 个顶点和 m 条边的连通图，则 $S(G)$，$Q(G)$，$R(G)$，$t(G)$ 定义分别如下：

1）剖分图 $S(G)$ 是将图 G 的每条边替换为一条长度为 2 的路所构成的图；

2）Q- 图 $Q(G)$ 是通过在图 G 的每条边上引入一个新的顶点，然后通过 G 将相邻边上的新顶点对应连接起来而形成的图；

3）R- 图 $R(G)$ 是通过在图 G 的每条边上放置一个与之相关的新顶点，然后将每个新顶点连接到相应边的末端顶点来构造的图；

4）全图 $t(G)$ 是顶点对应于图 G 的顶点集和边集并集，且 $t(G)$ 的两个顶点相邻，当且仅当对应的元素在 G 中相邻或关联.

定义 2　设 G_1 和 G_2 是两个图且 $V(G_1) = \{u_1, u_2, \cdots, u_{|V(G_1)|}\}$，$V(G_2) = \{v_1, v_2, \cdots, v_{|V(G_2)|}\}$，则

1）图 G_1 和 G_2 的联图 $G_1 + G_2$：

$$V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2);$$

$$E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(u_1, u_2) \mid u_1 \in V(G_1), u_2 \in V(G_2)\}.$$

2）图 G_1 和 G_2 的冠图 $G_1 \circ G_2$：取一个 G_1 的拷贝和 $|V(G_1)|$ 个 G_2 的拷贝，然后将 G_1 的第 i 个顶点和第 i 个 G_2 的拷贝的所有顶点都相连，$i = 1, 2, \cdots, |V(G_1)|$.

1　一些运算图的电阻距离和基尔霍夫指标

图运算已经被广泛地应用于分析从现实世界中抽象出来的具有拓扑性质的复杂网络. 其中字典积、笛

卡尔积、联图、冠图和星图等，这些运算图的其他拓扑指标已有结果，这里给出一些运算图的电阻距离和基尔霍夫指数.

2012 年，高兴等[10] 给出了正则图的线图 $l(G)$、剖分图 $S(G)$ 和全图 $t(G)$ 的基尔霍夫指标的公式并刻画了下界成立的极图.

定理 1.1[10] 设 G 是一个连通的 d- 正则图，具有 $n(n \geqslant 2)$ 个顶点，则

$$Kf(l(G)) = \frac{d}{2}Kf(G) + \frac{(d-2)n^2}{8}.$$

推论 1.1[10] 设 G 是一个连通的 d- 正则图，具有 $n(n \geqslant 2)$ 个顶点，则

$$Kf(l(G)) \geqslant \frac{(n^2-4)d}{8} + \frac{n(n-2)}{4},$$

等式成立当且仅当 $G = K_n$.

定理 1.2[10] 设 G 是一个连通的 d- 正则图，具有 $n(n \geqslant 2)$ 个顶点，则

$$Kf(S(G)) = \frac{(d+2)^2}{2}Kf(G) + \frac{(d^2-4)n^2+4n}{8}.$$

推论 1.2[10] 设 G 是一个连通的 d- 正则图，具有 $n(n \geqslant 2)$ 个顶点，则

$$Kf(S(G)) \geqslant \frac{(d+2)^2 n(n-1)}{2d} + \frac{(d^2-4)n^2+4n-4(d+2)^2}{8},$$

等式成立当且仅当 $G = K_n$.

定理 1.3[10] 设 G 是一个连通的 d- 正则图，具有 $n(n \geqslant 2)$ 个顶点，则

$$Kf(t(G)) = \frac{(d+2)^2}{2(d+1)}Kf(G) + \frac{n(d+2)(dn+2n-4)}{8(d+1)} + \frac{n}{2}.$$

推论 1.3[10] 设 G 是一个连通的 d- 正则图，具有 $n(n \geqslant 2)$ 个顶点，则

$$Kf(t(G)) \geqslant \frac{(d+2)^2 n(n-1)}{2d(d+1)} + \frac{n(d+2)(dn+2n-4)-4(d+2)^2}{8(d+1)} + \frac{n}{2},$$

等式成立当且仅当 $G = K_n$.

2013 年，You 等[11] 修正了高兴等[10] 在 2012 年求出的正则图的全图的基尔霍夫公式及其下界.

定理 1.4[11] 设 G 是一个连通的 d- 正则图，具有 $n(n \geqslant 2)$ 个顶点，则

$$Kf(t(G)) = \frac{(d+2)^2}{2(d+3)}Kf(G) + \frac{n^2(d^2-4)}{8(d+1)} + \frac{n}{2} + \frac{n(d+2)(d+4)}{2(d+3)}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{u_i+3+d}.$$

推论 1.4[11] 设 G 是一个连通的 d- 正则图，具有 $n(n \geqslant 2)$ 个顶点，则

$$Kf(t(G) \geqslant \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)(d+2)^2}{2d(d+3)} + \frac{(d+2)[n^2(d+3)(d-2)-4(d+1)(d+2)]}{8(d+1)(d+3)} + \frac{n(d+2)(d+4)}{2(d+3)}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{u_i+3+d}.$$

2013 年，王维忠等[12] 刻画了正则图的 $Q(R)$- 图的基尔霍夫指标的公式和下界.

定理 1.5[12] 设 G 是一个 n 阶的连通 r- 正则图($r \neq 2$)，则

$$Kf(R(G)) = \frac{(r+2)^2}{6}Kf(G) + \frac{(n^2-n)(r+2)}{6} + \frac{n^2(r^2-4)}{8} + \frac{n}{2}.$$

推论 1.5[12] 设 G 是一个 n 阶的连通 r- 正则图($r \neq 2$)，则

$$Kf(R(G)) \geqslant \frac{(n^2-n)(r+2)^2}{6r} + \frac{(n^2-n-r-2)(r+2)}{6} + \frac{n^2(r^2-4)}{8} + \frac{n}{2},$$

等式成立当且仅当 $G \cong K_n$ 或 $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$，其中 n 为偶数.

定理 1.6[12] 设 G 是一个 n 阶的连通 r- 正则图，则

$$Kf(Q(G)) = \frac{(r+2)^2}{2(r+1)}Kf(G) + \frac{(r+2)^2 n^2-4n}{8(r+1)}.$$

推论 1.6[12]　设 G 是一个 n 阶的连通 r- 正则图，则

$$Kf(Q(G)) \geqslant \frac{(r+2)^2(n^2-n)}{2r(r+1)} + \frac{(r+2)^2(n^2-4)-4n}{8(r+1)},$$

等式成立当且仅当 $G \cong K_n$ 或 $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$，其中 n 为偶数.

2014 年，杨玉军[13] 计算了正则分子图的一些 xyz 变换的 Kirchhoff 指标，其在文献[14] 中证明了一般图的剖分图 $S(G)$ 的基尔霍夫指标可以用图 G 的基尔霍夫指标、乘法度 - 基尔霍夫指标、加法度 - 基尔霍夫指标、顶点数 n、边数 m 表示. 这个结果推广了高兴等[10] 关于正则图的剖分图 $S(G)$ 的基尔霍夫指标的结果.

2015 年，Sun 等[15] 给出了一般图的剖分图的电阻距离和基尔霍夫指标的另一种计算公式.

定理 1.7[13]　设图 G 为 n 个顶点和 m 条边的 r- 正则图($r \geqslant 2$)，则

$$Kf(G^{0++}) = \frac{(r+2)^2}{2}Kf(G) + \frac{n(r+2)[n(r+2-4)]}{8(r+1)} + \frac{n}{2}.$$

定理 1.8[13]　设图 G 为 n 个顶点和 m 条边的 r- 正则图($r \geqslant 2$)，则

$$Kf(G^{+0+}) = \frac{(r+2)^2}{6}Kf(G) + \frac{(r+2)(n^2-n)}{6} + \frac{(r-4)n^2}{8} + \frac{n}{2}.$$

定理 1.9[13]　设图 G 为 n 个顶点和 m 条边的 r- 正则图($r \geqslant 2$)，则

$$Kf(G^{0+1}) = \frac{(n-1)(r+2)}{r} + \frac{n^2(r^2-4)}{8r+4n} + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{n(2+r)}{2(n+\lambda_i)} + 1.$$

定理 1.10[13]　设图 G 为 n 个顶点和 m 条边的 r- 正则图($r \geqslant 2$)，则

$$Kf(G^{0+-}) = \frac{n}{n-2} + \frac{n^2(r^2-4)}{4(n+2r-2)} + \frac{r+2}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(n-2)(r+2)+2\lambda_i}{[(n-2)r+2]\lambda_i + nr(n-2)}.$$

定理 1.11[13]　设图 G 为 n 个顶点和 m 条边的 r- 正则图($r \geqslant 2$)，则

$$Kf(G^{--+}) = \frac{n^2(r^2-4)}{2nr+8-8r} + \frac{nr+2n}{2(r+2)}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{n(r+2)(nr+2n+2r+4-4\lambda_i)}{2(n+r-\lambda_i)(nr+4-2\lambda_i)-8r+4\lambda_i}.$$

定理 1.12[14]　设 G 是一个连通图，具有 $n(n \geqslant 2)$ 个顶点和 m 条边，则

$$Kf(S(G)) = 2Kf(G) + Kf^{+}(G) + \frac{1}{2}Kf^{*}(G) + \frac{m^2-n^2+n}{2}.$$

2015 年，杨玉军和 Klein[16] 得到了剖分和三角剖分图的加法度(乘法度) - 基尔霍夫指标公式，以及一个新的三角剖分基尔霍夫指标公式，并给出了图的迭代剖分和三角剖分的(加法度 -、乘法度 -) 基尔霍夫指标公式.

定理 1.13[16]　设图 G 为 $n(n \geqslant 2)$ 个顶点和 m 条边的连通图，则剖分图 $S(G)$ 的加法度 - 基尔霍夫指标为：

$$Kf^{+}(S(G)) = 4Kf^{+}(G) + 4Kf^{*}(G) + (m+n)(m-n+1) + 2m(m-n).$$

定理 1.14[16]　设图 G 为 $n(n \geqslant 2)$ 个顶点和 m 条边的连通图，则剖分图 $S(G)$ 的乘法度 - 基尔霍夫指标为：

$$Kf^{*}(S(G)) = 8Kf^{*}(G) + 2m(2m-2n+1).$$

定理 1.15[16]　设图 G 为 $n(n \geqslant 2)$ 个顶点和 m 条边的连通图，则迭代剖分图 $S^k(G)$ 的乘法度 - 基尔霍夫指标为：

$$Kf^{*}(S^k(G)) = 8^k Kf^{*}(G) + \frac{8^k-2^k}{3}m(2m-2n+1).$$

定理 1.16[16]　设图 G 为 $n(n \geqslant 2)$ 个顶点和 m 条边的连通图，则迭代剖分图 $S^k(G)$ 的加法度 - 基尔霍夫指标为：

$$Kf^{+}(S^k(G)) = 4^k Kf^{+}(G) + (8^k-4^k)Kf^{*}(G) + \frac{8^k-2^k}{3}m(2m-2n+1) - \frac{4^k-1}{3}(m-n)(m-n+1).$$

定理 1.17[16]　设图 G 为 $n(n \geqslant 2)$ 个顶点和 m 条边的连通图，则迭代剖分图 $S^k(G)$ 的基尔霍夫指标为：

$$Kf(S^k(G)) = 2^k Kf(G) + \frac{4^k - 2^k}{2} Kf^+(G) + \frac{8^k - 2\times 4^k + 2^k}{4} Kf^*(G) + \frac{8^k - 2^k}{12} m(2m - 2n + 1) - \frac{4^k - 1}{6}(m - n)(m - n + 1).$$

定理 1.18[16] 设图 G 为 $n(n \geqslant 2)$ 个顶点和 m 条边的连通图，则三角剖分图 $T(G)$ 的基尔霍夫指标为：

$$Kf(T(G)) = \frac{2}{3}Kf(G) + \frac{1}{3}Kf^+(G) + \frac{1}{6}Kf^*(G) + \frac{3m^2 - n^2 + 2mn - 2m + n}{6}.$$

定理 1.19[16] 设图 G 为 $n(n \geqslant 2)$ 个顶点和 m 条边的连通图，则三角剖分图 $T(G)$ 的加法度－基尔霍夫指标为：

$$Kf^+(T(G)) = 2Kf^+(G) + 2Kf^*(G) + \frac{12m^2 - mn - n^2 - 2m + n}{3}.$$

定理 1.20[16] 设图 G 为 $n(n \geqslant 2)$ 个顶点和 m 条边的连通图，则三角剖分图 $T(G)$ 的乘法度－基尔霍夫指标为：

$$Kf^*(T(G)) = 6Kf^+(G) + 6m^2 - 2mn.$$

定理 1.21[16] 设图 G 为 $n(n \geqslant 2)$ 个顶点和 m 条边的连通图，则迭代三角剖分图 $T^k(G)$ 的乘法度－基尔霍夫指标为：

$$Kf^*(T^k(G)) = 6^k Kf^*(G) + (\frac{5}{3}9^k - \frac{4}{3}6^k - \frac{1}{3}3^k)m^2 - \frac{2}{3}(6^k - 3^k)mn.$$

定理 1.22[16] 设图 G 为 $n(n \geqslant 2)$ 个顶点和 m 条边的连通图，则迭代三角剖分图 $T^k(G)$ 的加法度－基尔霍夫指标为：

$$Kf^+(T^k(G)) = 2^k Kf^+(G) + \frac{6^k - 2^k}{2} Kf^*(G) + (\frac{85}{84}9^k - \frac{2}{3}6^k - 3^{k-1} - \frac{2}{21}2^k)m^2 - (\frac{3^k}{2} - \frac{2^k}{3})m - (\frac{6^k}{3} - \frac{2}{3}3^k)mn - \frac{2^k}{3}n^2 + \frac{2^k}{3}n + \frac{(m - 2n)(m - 2n + 2)}{12}.$$

定理 1.23[16] 设图 G 为 $n(n \geqslant 2)$ 个顶点和 m 条边的连通图，则迭代三角剖分图 $T^k(G)$ 的基尔霍夫指标为：

$$Kf(T^k(G)) = (\frac{2}{3})^k Kf(G) + [\frac{2^k}{4} - \frac{1}{4}(\frac{2}{3})^k]Kf^+(G) + [\frac{6^k}{16} - \frac{2^k}{8} + \frac{1}{16}(\frac{2}{3})^k]Kf^*(G) + [\frac{25}{168}9^k - \frac{6^k}{12} - \frac{3}{28}3^k - \frac{2^k}{42} + \frac{11}{168}(\frac{2}{3})^k]m^2 - [\frac{6^k}{24} - \frac{3}{14}3^k + \frac{29}{168}(\frac{2}{3})^k]mn - [\frac{5}{28}3^k - \frac{2^k}{12} - \frac{2}{21}(\frac{2}{3})^k]m - [2^k - (\frac{2}{3})^k]\frac{n^2 - n}{12} - [1 - (\frac{2}{3})^k]\frac{(m - 2n)(m - 2n + 2)}{24}.$$

2016 年，刘晓刚等[17] 给出了 R- 点联和 R- 边联的电阻距离和基尔霍夫指标的结果.

定理 1.24[17] 设图 G_1 的顶点数为 n_1 边数为 m_1，图 G_2 的顶点数为 n_2，则

$$Kf(G_1 < v >_R G_2) = (n_1 + m_1 + n_2)(\frac{m_1}{2} + \frac{1}{4}tr(A^{-1}A_{G_1}) + \frac{1}{4}tr(A^{-1}D_{G_1}) + \sum_{i=1}^{n_1}\frac{2}{3u_i(G_1) + 2n_2} + \sum_{i=1}^{n_2-1}\frac{1}{u_i(G_2) + n_1}) - \frac{1}{4}\pi^T A^{-1}\pi - \frac{m_1(n_2 + 4) + 2n_1}{2n_2},$$

其中 $A = \frac{3}{2}L_{G_1} + n_2 I_{n_1}$，$D_{G_1} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_{n_1})$，$\pi = (d_1, d_2, \cdots, d_{n_1})^T$.

定理 1.25[17] 设图 G_1 是 n_1 个顶点和 m_1 条边上的 r- 正则图$(r > 0)$，图 G_2 的顶点数为 n_2，则

$$Kf(G_1 < e >_R G_2) = (n_1 + m_1 + n_2)(\frac{m_1}{n_2 + 2} + \frac{2r + (n_2 + 2)^2}{n_2 + 2}\sum_{i=1}^{n_1}\frac{1}{(n_2 + 3)u_i(G_1) + rn_2} - \frac{1}{n_2 + 2}\sum_{i=1}^{n_1}\frac{u_i(G_1)}{(n_2 + 3)u_i(G_1) + rn_2} + \sum_{i=1}^{n_2-1}\frac{1}{u_i(G_2) + m_1}) - \frac{m_1(r + 4) + n_1(n_2 + 2)}{rn_2}.$$

2016 年，卢鹏丽等[18] 刻画了 Q- 图的电阻距离．刘群等[19] 给出了 R- 点(边) 冠图 $G_1 \odot G_2$ ($G_1 \Theta G_2$) 的基尔霍夫指标的公式和下界，其中 G_1 为正则图，G_2 为任意图．

定理 1.26[19]　设 G_1 是一个具有 n_1 个顶点和 m_1 条边的 r_1- 正则图，G_2 是一个具有 n_2 个顶点的任意图，则

$$Kf(G_1 \odot G_2) = \frac{(2n_2 + r_1 + 2)^2}{6} Kf(G_1) + \frac{n_1(3 + n_2 + r_1)}{2} + \frac{2n_1(n_1 - 1)(2 + r_1 + 2n_2)}{3} + \frac{n_1^2(r_1 - 2)(r_1 + 2 + 2n_2)}{8} + \frac{n_1^2(2 + r_1 + 2n_2)}{2} \sum_{i=2}^{n_2} \frac{1}{1 + u_i(G_2)}.$$

定理 1.27[19]　设 G_1 是一个具有 n_1 个顶点和 m_1 条边的 r_1 - 正则图，G_2 是一个具有 n_2 个顶点的任意图，则

$$Kf(G_1 \Theta G_2) = \frac{(r_1 n_2 + r_1 + 2)^2}{6} Kf(G_1) + \frac{n_1(3 + n_2 + r_1)}{2} + \frac{(n_1^2 - n_1)(n_2 + 4)(2 + r_1 + r_1 n_2)}{6} + \frac{n_1^2(r_1 - 2)(3 + n_1)(r_1 + 2 + r_1 n_2)}{8} + \frac{n_1^2 r_1(2 + r_1 + r_1 n_2)}{4} \sum_{i=2}^{n_2} \frac{1}{1 + u_i(G_2)}.$$

此外，Xie 等[20] 还得到了简单连通图迭代剖分图的正规拉普拉斯谱，作为应用的一个例子，计算了它们的乘法度 - 基尔霍夫指标、Kemeny 常数和生成树数的精确值.

定理 1.28[20]　对于任意 $n > 0$，$s^n(G)$ 和 $s^{n-1}(G)$ 的乘法度 - 基尔霍夫指标的关系如下：

$$Kf^*(s^n(G)) = 8Kf^*(S^{n-1}(G)) + 2^n(2r - 1)E_0,$$

因此，$Kf^*(s^n(G))$ 的一般表达式为：

$$Kf^*(s^n(G)) = 8^n Kf^*(G) + \frac{8^n - 2^n}{3}(2r - 1)E_0,$$

其中 $r = E_0 - N_0 + 1$.

2021 年，Sun 等[21] 刻画了 Q- 点(边) 联图的电阻距离和基尔霍夫指标．

定理 1.29[21]　设 G_1 和 G_2 是两个图，分别有 $n_1(n_2)$ 个顶点 $m_1(m_2)$ 条边，如果 G_1 是一个 d- 正则图，那么 $G_1 < v >_Q G_2$ 的基尔霍夫指标为：

$$Kf(G_1 < v >_Q G_2) = \frac{n_1 + m_1 + n_2}{d + n_2} \sum_{i=1}^{n_1} \frac{2d - u_i(L_{G_1}) + (d + n_2)^2}{2n_2 + (d + n_2 + 1)u_i(L_{G_1})} + \sum_{i=1}^{n_2} \frac{n_1 + m_1 + n_2}{u_i(L_{G_2}) + n_1} + c_1 - c_2,$$

其中 $c_1 = \dfrac{(n_1^2 - d - n_2)(n_1 + m_1 + n_2)}{(d + n_2)n_1}$，$c_2 = \dfrac{(d + n_2)dn_1 + 4n_1(1 + d)}{4n_2}$.

定理 1.30[21]　设 G_1 和 G_2 是两个图，分别有 $n_1(n_2)$ 个顶点 $m_1(m_2)$ 条边，如果 G_1 是一个 d - 正则图，那么 $G_1 < e >_Q G_2$ 的基尔霍夫指标为：

$$Kf(G_1 < e >_Q G_2) = (n_1 + m_1 + n_2)\left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^{n_1} \frac{2d - u_i(L_{G_1}) + d^2}{dn_2 + (d + 1)u_i(L_{G_1})} + \sum_{i=1}^{n_2} \frac{2}{2u_i(L_{G_2}) + dn_1} + c_1\right) - c_2,$$

其中 $c_1 = \dfrac{n_1^2}{dn_1}$，$c_2 = \dfrac{4dn_1 + d^2 n_1 + 2n_1 n_2 + 4n_1}{2dn_2}$.

2　特殊图类的(乘法度 -)基尔霍夫指标

因为对于一般图的基尔霍夫指标计算较困难，所以只给出了一些特殊图类的结果，如 Nordhaus-Gaddum[22] 结论、单圈图的基尔霍夫指标、双圈图的基尔霍夫指标.

2.1　基尔霍夫指标的 Nordhaus-Gaddum 类型结论

2008 年，周波和 Trinajstić[23] 给出了 Kirchhoff 指标的 Nordhaus-Gaddum 型结果．

定理 2.1[23]　设 G 是顶点数为 $n \geqslant 5$ 的连通图，且 $\overline{G}$ 也是连通的，则

$$4n - 2 \leqslant Kf(G) + Kf(\overline{G}) < \frac{n^3 + 3n^2 + 2n - 6}{6}.$$

2011 年，杨玉军等[24] 通过证明，改进了周波和 Trinajstić[23] 的结果.

定理 2.2[24] 设 G 是顶点数为 $n \geqslant 5$ 的连通图，且 $\overline{G}$ 也是连通的，则

$$4n \leqslant Kf(G) + Kf(\overline{G}) < \frac{n^3 + 17n - 18}{6},$$

等式(在下界) 成立当且仅当 G 是会议图时.

虽然上界几乎是最好的可能，但它是不可达到的. 对于上界，他们提出如下猜想：

猜想 2.1[24] 设 G 是顶点数为 $n \geqslant 5$ 的连通图，且 $\overline{G}$ 也是连通的，则

$$Kf(G) + Kf(\overline{G}) \leqslant \frac{n^3 - n}{6} + n\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n - 4\sin^2 \frac{k\pi}{2n}},$$

等式成立当且仅当 G 或 $\overline{G}$ 是路 P_n.

2016 年，Das 和杨玉军[25] 考虑了 3 种基于电阻距离的图不变量，即基尔霍夫指标、加法度 - 基尔霍夫指标和乘法度 - 基尔霍夫指标，给出了基于阻力距离的图不变量的 Nordhaus-Gaddum 型的一些结果，并建立了这些基尔霍夫指标之间的关系.

定理 2.3[25] 设 G 是顶点数为 n 的连通图，且 $\overline{G}$ 也是连通的，则

$$Kf(G)Kf(\overline{G}) \geqslant (2n - 1)^2.$$

定理 2.4[25] 设 G 是顶点数为 n 的连通图，且 $\overline{G}$ 也是连通的，则

$$Kf(G)Kf(\overline{G}) > 4n(n - 2).$$

定理 2.5[25] 设 G 是一个 n 阶连通图，有 m 条边，最大度和最小度分别为 Δ 和 δ，则

$$Kf^+(G) + Kf^+(\overline{G}) \leqslant 2(n - 1)(n - 1 + \Delta - \delta) + [n(n - 1) - 2m](n + 3 - 2\delta)\Delta + 2(n - 1 - \delta)(2\Delta + 5 - n)m.$$

定理 2.6[25] 设 G 是一个 n 阶连通图，有 m 条边，最大度 $\Delta < n - 1$，则

$$Kf^*(G) + Kf^*(\overline{G}) > n(n^2 - 3n + 4) - \frac{1}{(n - \Delta - 1)^2}[n(n - 1) - 2m] - 2M_2^*(G),$$

其中 $M_2^*(G) = \sum_{v_iv_j \in E(G)} \frac{1}{d_id_j}$ 为第二 Zagreb 指标.

定理 2.7[25] 设 G 是一个 n 阶连通图，有 m 条边，最大度和最小度分别为 Δ 和 δ，则

$$Kf^*(G) + Kf^*(\overline{G}) \leqslant [\Delta^2 + (n - \delta - 1)^2](n - 1) + [\frac{n(n - 1)}{2} - m](n + 3 - 2\delta)\Delta^2 + m(n - 1 - \delta)^2(2\Delta + 5 - n).$$

定理 2.8[25] 设 G 是一个 n 阶连通图，有 m 条边，最大度 $\Delta > 1$，最小度 $\delta > 1$，则

$$Kf^*(G) - Kf^+(G) + Kf(G) \geqslant 2m(n - 1) - n^2 + (n - 1)ID(G) - \frac{(\Delta + \delta - 2)^2}{(\Delta - 1)(\delta - 1)}m - [\frac{n(n - 1)}{2} - m](\frac{\Delta}{\delta} + \frac{\delta}{\Delta}),$$

其中 $ID(G) = \sum_{v_i \in V(G)} \frac{1}{d_i}$.

2018 年，杨玉军等[26] 利用电学和组合技术证明了文献[24] 的猜想除 5 个顶点上的树图外，对所有图都是正确的.

定理 2.9[26] 设 G 是顶点数为 n 的连通图，且 $\overline{G}$ 也是连通的，则

1) 当 $n = 4$ 和 $n \geqslant 6$ 时，有 $$Kf(G) + Kf(\overline{G}) \leqslant \frac{n^3 - n}{6} + n\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n - 4\sin^2 \frac{k\pi}{2n}},$$

等式成立当且仅当 G 或 $\overline{G}$ 是路 P_n.

2）当 $n=5$ 时，有
$$Kf(G)+Kf(\overline{G})\leqslant 28.25,$$
等式成立当且仅当 G 或 $\overline{G}$ 是树 T_5.

2.2　单圈图的基尔霍夫指标

若图 G 只包含一个圈，则称为单圈图. 为方便起见，用 $G=U(C_l;T_1,T_2,\cdots,T_l)$ 表示，其中 C_l 是 G 中唯一的圈. 设 $V(C_l)=\{v_1,v_2,\cdots,v_l\}$ 满足对 $1\leqslant i\leqslant l$，v_i 和 v_{i+1} 相邻，对每个 i，令 T_i 为 G 中删掉圈上除 v_i 以外的所有点后得到的图中包含 v_i 的分支.

设 S_n^l 是在圈 C_l 上的任意一个点上加 $n-l$ 条悬挂边所构成的图. 用 P_n^l 表示在圈 C_l 的任意一个点和路 P_{n-l+1} 的一个端点连接所构成的图.

2008 年，杨玉军等[27] 研究了单圈图的基尔霍夫指标的界，并给出了一些特殊单圈图的基尔霍夫指标公式. 如：
$$Kf(C_n)=\frac{n^3-n}{12};Kf(S_n^3)=n^2-\frac{8}{3}n+1;Kf(S_n^4)=n^2-\frac{5}{2}n-1;Kf(P_n^3)=\frac{n^3-11n+18}{6}.$$

定理 2.10[27]　在所有的 n 个顶点的单圈图中：

1）若 $n<8$，则 C_n 达到最小的基尔霍夫指标；

2）若 $8\leqslant n<12$，则 S_n^4 达到最小的基尔霍夫指标；

3）若 $n=12$，则 S_n^3 和 S_n^4 达到最小的基尔霍夫指标，否则 S_n^3 达到最小的基尔霍夫指标；

4）P_n^3 达到最大的基尔霍夫指标.

定理 2.11[27]　对顶点数为 n 的单圈图 G：

1）若 $n<8$，则 $\frac{n^3-n}{12}\leqslant Kf(G)\leqslant\frac{n^3-11n+18}{6}$；

2）若 $8\leqslant n\leqslant 12$，则 $n^2-\frac{5}{2}n-1\leqslant Kf(G)\leqslant\frac{n^3-11n+18}{6}$；

3）若 $n>12$，则 $n^2-\frac{8}{3}n+1\leqslant Kf(G)\leqslant\frac{n^3-11n+18}{6}$.

2011 年，文献[9] 首次给出超基尔霍夫指标的概念，并给出了超 Kirchhoff 指标的下界和上界，同时确定了当 $n\geqslant 5$ 时具有最小、次小和第三小超 Kirchhoff 指标和最大、次大和第三大超 Kirchhoff 指标的 n 顶点单圈图. 此外，还确定了圈长为 $s(3\leqslant s\leqslant n)$ 的 n 阶单圈图的最小和最大的超基尔霍夫指标. 2012 年，文献[8] 首次给出加法度 - 基尔霍夫指标的概念，并刻画了具有最小和次小加法度 - 基尔霍夫指标的 n 个顶点的单圈图.

一个单圈图称为是满载单圈图，如果它的圈上的每个顶点的度都不小于 3. 2009 年，Guo 等[28] 确定了满载单圈图的基尔霍夫指标的界并且刻画了达到界的极值图.

定理 2.12[28]　设 G 是顶点数 $n\geqslant 6$ 的满载单圈图，则
$$Kf(G)=\begin{cases}n^2-16=48, & n=8;\\ n^2-\frac{4}{3}n-5, & n\neq 8.\end{cases}$$
等式成立当且仅当 $n=8$ 时 $G=U(C_4;K_2,K_2,K_2,K_2)$；当 $n\neq 8$ 时 $G=U(C_3;K_2,K_2,S_{n-4})$.

定理 2.13[28]　设 G 是顶点数 $n\geqslant 6$ 的满载单圈图，则
$$Kf(G)\leqslant\frac{1}{6}n^3-\frac{11}{2}n+20,$$
等式成立当且仅当 $G=U(C_3;K_2,K_2,P_{n-4})$.

2014 年，Feng 等[29] 刻画了满载单圈图的最大和最小乘法度 - 基尔霍夫指标和仙人掌图的最小乘法度 -

基尔霍夫指标.

定理 2.14[29] 设 G 是 $n(\geqslant 6)$ 阶的满载单圈图，则

$$Kf^*(U(C_3;K_2,K_2,S_{n-4}))\leqslant Kf^*(G)\leqslant Kf^*(U(C_3;K_2,K_2,P_{n-4})),$$

左边等号成立当且仅当 $G\cong U(C_3;K_2,K_2,S_{n-4})$，右边等号成立当且仅当 $G\cong U(C_3;K_2,K_2,P_{n-4})$.

2020 年，Qi 等[30] 确定了 n 阶具有固定最大度的单圈图的极大乘法度 - 基尔霍夫指标，以及 n 阶单圈图的前 7 个极大乘法度 - 基尔霍夫指标，并得到了相应的极图.

定理 2.15[30] 设 $U(n,\Delta)$ 为 n 个顶点最大度为 Δ 的单圈图集合，其中 $2\leqslant\Delta\leqslant n-1$，设 $U'(n,\Delta)$ 是将 C_3 的顶点与 Δ 顶点上的星中心连接，路径长度为 $n-\Delta-2$ 得到的单圈图，则

1）如果 $\Delta=3,4,n-2,n-1$ 或 $\Delta\geqslant 5$，$n<\Delta+3+\dfrac{4}{\Delta-4}$，那么 $U(n,\Delta)$ 是唯一具有最大乘法度 - 基尔霍夫指标的图，其值等于 $\dfrac{1}{3}(2n^3-6n\Delta^2+6n\Delta-n+4\Delta^3-4\Delta+15)$；

2）如果 $\Delta\geqslant 5$，$n>\Delta+3+\dfrac{4}{\Delta-4}$，那么 $U'(n,\Delta)$ 是唯一具有最大乘法度 - 基尔霍夫指标的图，其值等于 $\dfrac{1}{3}(2n^3-6n\Delta^2+18n\Delta-49n+4\Delta^3-12\Delta^2+8\Delta+81)$；

3）如果 $\Delta\geqslant 5$，$n>\Delta+3+\dfrac{4}{\Delta-4}$（即 $\Delta=5,n=12;\Delta=6,n=11;\Delta=8,n=12$），那么 $U(n,\Delta)$ 和 $U'(n,\Delta)$ 是唯一具有最大乘法度 - 基尔霍夫指标的图. 当 $\Delta=5,n=12$ 时，其值等于 823；当 $\Delta=6,n=11$ 时，其值等于 $498\dfrac{2}{3}$；当 $\Delta=8,n=12$ 时，其值等于 471.

2020 年，Chen 等[31] 得到了树和单圈图的补图的 Kirchhoff 指标的排序，并给出了基尔霍夫指标的一个上界.

定理 2.16[31] 设 G 是一个有 n 个顶点 m 条边的连通图，则

$$Kf(G)\leqslant\frac{n(n-1)-2m}{u_{n-1}(G)}+n-1,$$

等式成立当且仅当 $G\cong K_n$，或 $G\cong K_{n-1,1}$，或 $G\cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$（$n$ 为偶数）.

2021 年，Chen 等[32] 用单圈图的剖分图的匹配数刻画了单圈图的 Kirchhoff 指标.

定理 2.17[32] 对于任意 n 阶连通单圈图 G，它有一个 C_k（圈长为 k），其 Kirchhoff 指标 $Kf(G)$ 可以表示为：

$$Kf(G)=\begin{cases}[m(S(G),n-2)-2m(S(G)-C_{2k},n-k-2)]/k, & \text{当 } 3\leqslant k\leqslant n-2 \text{ 时；}\\ m(S(G),n-2)/k. & \text{当 } k=n-1,n \text{ 时.}\end{cases}$$

其中 $m(S(G),n-2)$ 为单圈图的剖分图 $S(G)$ 有 $n-2$ 条边的匹配数，$S(G)-C_{2k}$ 为 $S(G)$ 中删除圈 C_{2k} 的所有顶点而得到的无圈图.

2.3 双圈图的基尔霍夫指标

一个双圈图就是边数比顶点数多 1 的连通图. 设 $S_n^{p,q}$ 表示通过给圈 C_p 和 C_q 的唯一公共顶点粘接 $n+1-p-q$ 条悬挂边所构成的图，$P_n^{p,q}$ 表示由两个不交圈 C_p 和 C_q 以及连接他们的一条长为 $n-p-q+1$ 的路所构成的图.

2009 年，张和平等[33] 给出了恰有两个圈的双圈图的基尔霍夫指标的界，并刻画了达到界的极值图.

定理 2.18[33] 在所有顶点数为 n 的恰有两个圈的双圈图中：

1）$P_n^{3,3}$ 达到最大的基尔霍夫指标；

2）下列图达到最小的基尔霍夫指标：$S_5^{3,3}$；$S_6^{3,4}$；$S_7^{4,4}$；$S_8^{4,4}$ 和 $S_8^{4,5}$；$S_n^{4,4}(9\leqslant n\leqslant 11)$；$S_{12}^{4,4}$；$S_{12}^{3,4}$ 和 $S_{12}^{3,3}$；$S_n^{3,3}(n>12)$.

定理 2.19[33] 对顶点数为 n 的恰有两个圈的双圈图 G：

1）若 $n=6$，则 $n^2-\dfrac{19n}{6}-1\leqslant Kf(G)\leqslant\dfrac{n^3-21n+36}{6}$；

2）若 $7 \leqslant n \leqslant 12$，则 $n^2 - 3n - 3 \leqslant Kf(G) \leqslant \frac{n^3 - 21n + 36}{6}$；

3）若 $n = 5$ 或 $n > 12$，则 $n^2 - \frac{10n}{3} + 1 \leqslant Kf(G) \leqslant \frac{n^3 - 21n + 36}{6}$.

2016 年，Huang 等[34] 刻画了二部双圈图 β_n^+ 补图的基尔霍夫指标极值.

定理 2.20[34]　设 $G \in \beta_n^+$，则

$$Kf(\overline{G}) \leqslant \frac{2n^4 - 17n^3 + 49n^2 - 50n - 4}{(n-1)(n-2)(n-5)},$$

等式成立当且仅当 $G \cong \theta_5(n-5, 0, 0, 0, 0)$.

2016 年，刘家保等[35] 刻画了具有最小基尔霍夫指标的双圈图，并确定了双圈图的基尔霍夫指标的界.

定理 2.21[35]　设 $G \in \theta_n^{p,q,m}$ 且 G 和 $S_n^{p,q,m}$ 不同构，则

$$Kf(S_n^{p,q,m}) < Kf(G).$$

定理 2.22[35]　设 $G \in \beta_n$，则

$$\min_{G \in \beta_n}\{Kf(G)\} = \begin{cases} Kf(S_4^{2,2,0}), \text{当 } n = 4 \text{ 时}; \\ Kf(S_n^{2,2,1}), \text{当 } n = 5 \text{ 或 } n \geqslant 15 \text{ 时}; \\ Kf(S_n^{3,2,1}), \text{当 } n = 6 \text{ 或 } n \geqslant 14 \text{ 时}; \\ Kf(S_n^{3,3,1}), \text{当 } n = 7 \text{ 或 } n \geqslant 13 \text{ 时}; \\ Kf(S_n^{3,3,2}), \text{当 } n = 8 \text{ 或 } n \geqslant 12 \text{ 时}; \\ Kf(S_9^{4,3,2}), \text{当 } n = 9 \text{ 时}; \\ Kf(S_{10}^{4,4,2}), \text{当 } n = 10 \text{ 时}; \\ Kf(S_1^{4,4,3}), \text{当 } n = 11 \text{ 时}. \end{cases}$$

2018 年，Fei 等[36] 刻画了 $n(\geqslant 6)$ 阶的双圈图的最大乘法度 - 基尔霍夫指标和 $n(\geqslant 7)$ 阶的双圈图的次大乘法度 - 基尔霍夫指标.

定理 2.23[36]　设 G 是一个 $n(n \geqslant 6)$ 阶双圈图，则

$$Kf^*(G) \leqslant \frac{2}{3}n^3 + 2n^2 - 23n + \frac{89}{3},$$

等式成立当且仅当 $G \cong B_n$.

定理 2.24[36]　设 G 是一个 $n(n \geqslant 7)$ 阶双圈图且 G 不同构于 B_n，则

$$Kf^*(G) \leqslant \frac{2}{3}n^3 + 2n^2 - \frac{97}{3}n + \frac{173}{3},$$

等式成立当且仅当 $G \cong B'_n$.

特别地，2013 年 Deng 等[37] 得到了由 G 的剖分图的闭游动数表示的基尔霍夫指标的表达式，并确定了树的补图的基尔霍夫指标的第一和第二最大值.

定理 2.25[37]　设 G 是一个具有 $n(n \geqslant 2)$ 个顶点和 m 条边的二部图，则

$$Kf(\overline{G}) = \frac{n-m}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k \geqslant 0} Tr(A^{2k}(S(G)))n^{-k} - 1.$$

定理 2.26[37]　设 T 是一个有 $n(n \geqslant 2)$ 个顶点的树，则

$$Kf(\overline{S}_n) \geqslant Kf(\overline{T}_n) \geqslant Kf(\overline{P}_n),$$

左边等号成立当且仅当 T 是 S_n 时，右边等号成立当且仅当 T 是 P_n.

定理 2.27[37]　设 T 是一棵有 $n(n \geqslant 5)$ 个顶点的树，那么双星 $S(n-2, 2)$ 是唯一一棵 $Kf(\overline{T})$ 有第二个最大值的树.

定理 2.28[37] 设 T 是一棵有 $n(n \geqslant 5)$ 个顶点的树，那么 $T(1)$ 是唯一一棵 $Kf(\overline{T})$ 有第二个最小值的树，其中 $T(i)$ 是由 $P_{n-1} = u_0u_1\cdots u_{n-2}$ 通过在点 u_i 增加一个悬挂点得到的图，这里 $0 \leqslant i \leqslant n-2$.

3 基尔霍夫指标的界

本节我们将确定一些图的基尔霍夫指标的界，并且刻画达到界的极值图.

2008 年，周波和 Trinajstić[23] 得到了 Kirchhoff 指标下界的一个结果.

$$Kf(G) \geqslant -1 + (n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i},$$

等式成立当且仅当 $G \simeq K_n$ 或 $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ 或 $G \cong K_{1,n-1}$ 或 $G \cong \Gamma_d$.

2010 年，Palacios 等[38] 给出了 n 个顶点的 d 正则图的基尔霍夫指标上下界.

命题 3.1[38] 对任意 n 个顶点的 k 正则图，有

$$\frac{(n-1)^2}{d} \leqslant Kf(G) \leqslant \frac{n(n-1)}{d(1-u_2)},$$

如果图是二部图，则下界可进一步改进为：

$$\frac{n(2n-3)}{2d} \leqslant Kf(G).$$

2011 年，Palacios 等[39] 给出了当 G 是任意连通图时，基尔霍夫指标的界为：

$$\left(\frac{n}{d_1}\right)\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{1-\lambda_i(P)}\right) \leqslant Kf(G) \leqslant \left(\frac{n}{d_n}\right)\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{1-\lambda_i(P)}\right),$$

其中 $1 = \lambda_1(P) > \lambda_2(P) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(P) \geqslant -1$ 是转移矩阵 $P = D^{-1}A$ 的特征值.

2013 年，Das[40] 得到 $Kf(G)$ 的下界取决于顶点数 n，最大度 Δ，生成树数 t：

$$Kf(G) \geqslant \frac{n}{1+\Delta} + n(n-2)\left(\frac{\Delta+1}{nt}\right)^{\frac{1}{n-2}},$$

等式成立当且仅当 $G \simeq K_n$ 或 $G \cong K_{1,n-1}$.

2019 年，Matejić 等[41] 得到了 $Kf(G)$ 以 n，m，Δ 为参数和其他一些图不变量的两个新的下界.

定理 3.1[41] 设 G 是一个具有 $n \geqslant 2$ 个顶点和 m 条边的简单连通图. 如果 G 是 d- 正则图，$1 \leqslant d \leqslant n-1$，则

$$Kf(G) \geqslant \frac{n(n-1)-d}{d},$$

$$Kf(G) \geqslant \frac{n(n-1)-\Delta}{\Delta} + \frac{(n-1)(n\Delta-2m)^2}{\Delta(2m\Delta-M_1(G))}.$$

第一个等式成立当且仅当 $G \cong K_n$，或者 $G \cong \Gamma_d$，第二个等式成立当且仅当 $G \cong K_{\Delta,n-\Delta}$. 其中 $M_1(G) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$ 为第一 Zagreb 指标.

2020 年，Milovanović 等[42] 用 $\tau(G)$、G 的阶数，以及 G 的大小和 G 的最大度 Δ 建立了 $Kf(G)$ 的几个下界.

定理 3.2[42] 设 G 是一个具有 $n \geqslant 3$ 个顶点和 m 条边的简单连通图，则

$$Kf(G) \geqslant 1 + \frac{n(n-2)^3}{(n-3)(2m-\Delta-1)+(n-2)\left(\frac{n\tau(G)}{1+\Delta}\right)^{\frac{1}{n-2}}},$$

等式成立当且仅当 $G \cong K_n$ 或 $G \cong K_{1,n-1}$ 或 $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$，这里 n 为偶数.

定理 3.3[42] 设 G 是一个具有 $n \geqslant 3$ 个顶点和 m 条边的简单连通图，则

$$Kf(G) \geqslant \frac{n(n-1)^3}{2m(n-2)+(n-1)(n\tau(G))^{\frac{1}{n-1}}},$$

等式成立当且仅当 $G \cong K_n$.

定理 3.4[42]　设 G 是一个具有 $n \geqslant 2$ 个顶点和 m 条边的简单连通图，则

$$Kf(G) \geqslant \frac{n(n-1)}{(n\tau(G))^{\frac{1}{n-1}}} + n\frac{(\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta})^2}{\delta \times \Delta},$$

等式成立当且仅当 $G \cong K_n$.

定理 3.5[42]　设 G 是一个具有 $n \geqslant 2$ 个顶点和 m 条边的简单连通图，对于任意具有性质 $u_{n-1} \geqslant k > 0$ 的实数 k，有

$$Kf(G) \geqslant \frac{2n(n-1)\sqrt{nk}}{(n+k)(nt)^{\frac{1}{n-1}}},$$

等式成立当且仅当 $k = n$ 和 $G \cong K_n$，其中 t 为生成树的个数.

2012 年，Yan 等[43] 刻画了正则图 G 的迭代线图 $L^k(G)$ 和迭代抛物线图 $C^k(G)$（或团插入图）的近似基尔霍夫指标.

定理 3.6[43]　设 G 是一个有 n 个顶点的连通的简单 r- 正则图，则

$$Kf(L^k(G)) \sim \frac{n^2(2^{k-2}r - 2^{k-1} + 1)}{4}\prod_{i=0}^{k-2}(2^{i-1}r - 2^i + 1)^2, (k \to \infty).$$

定理 3.7[43]　设 G 是一个有 n 个顶点的连通的简单 r- 正则图，则

$$Kf(C^k(G)) \sim [\frac{n^2(r-2)(r+1)}{2r(r+2)} + \frac{n}{(r+1)(r+2)} + Kf(G)]r^k(r+2)^k, (k \to \infty),$$

$$Kf(C^k(G)) \sim (\frac{n^2}{2} + Kf(G))r^k(r+2)^k, (k \to \infty, r \to \infty).$$

2017 年，田贵贤[44] 刻画了正则图的迭代全图的近似（乘法度 -）基尔霍夫指标.

定理 3.8[44]　设 G 是一个有 n 个顶点 m 条边的连通 r- 正则图 $r \geqslant 2$，则

$$Kf(t^k(G)) \sim n^2r(r+2)^2 2^{k-6}\prod_{i=0}^{k-3}(4^i r^2 + 2^{i+1}r + 1), (k \to \infty),$$

因此正则图的迭代全图的 Kirchhoff 指标的近似值与 G 的结构无关，只与 r 和 G 的顶点数有关.

推论 3.1[44]　设 G 是一个有 n 个顶点 m 条边的连通 r- 正则图 $r \geqslant 2$，则

$$Kf^*(t^k(G)) \sim n^2r^3(r+2)^2 8^{k-2}\prod_{i=0}^{k-3}(4^i r^2 + 2^{i+1}r + 1), (k \to \infty),$$

因此正则图的迭代全图的 Kirchhoff 指标的近似值与 G 的结构无关，只与 r 和 G 的顶点数有关.

G 的边 k- 部图是删除使 G 成为 k- 部图的最小边数，用 $l_k(G)$ 表示. 设 $m \leqslant n-k$，n，m，k 是具有 n 个顶点且 $l_k(G) \leqslant m$ 的图族，即

$$\psi_{n,m,k} = \{G: |V(G)| = n, l_k(G) \leqslant m\},$$

如果 $k = 2$，称为 G 的边二部图.

2017 年，He 等[45] 给出了关于 $\psi_{n,m,k}$ 的 Kirchhoff 指标最小化的第一个结果，其中刻画了 $\psi_{n,m,2}$ 中的最优图.

定理 3.9[45]　设 $G \in \psi_{n,m,2}$，其中 $m \leqslant \frac{n}{4}$，则

1) $Kf(G) \geqslant n(\frac{2m}{n+3} - \frac{4}{n+1} - \frac{2m}{n-1}) + 2n + 1$，当 n 为奇数；

2) $Kf(G) \geqslant n(\frac{2m}{n+4} - \frac{2m+4}{n}) + 2n + 1$，当 n 为偶数.

2019 年，Huang 等[46] 给出了给定边 k- 部图的最小基尔霍夫指标的理论和计算方法.

定理 3.10[46]　设 $G \in \psi_{n,m,2}$，其中 $m \leqslant \left|\frac{p}{2}\right|$，则

1) $Kf(G) \geqslant k - 1 + n(\frac{m}{n-p+2} + \frac{k(p-1)-m}{n-p})$，当 $q = 0$；

2) $Kf(G) \geqslant k-1+n\left(\frac{m}{n-p+1}+\frac{q(p-1)-m}{n-p-1}+\frac{(p-1)(k-q-1)}{n-p}\right)+2n+1$，当 $q=1,2,\cdots,k-1$.

这里设 $n=pk+q$，其中 p，q 是非负整数，且 $0 \leqslant q<k$.

4 基尔霍夫指标的应用

在化学图论中，一些化合物可以用化学图来表示，其中顶点代表原子，而边代表原子间的共价键. 此外，预测化合物的物理化学性质一直是理论化学的研究热点，因此下面列出一些线性链网络图的电阻距离和基尔霍夫指标的研究结果.

4.1 线性链和网络图的基尔霍夫指标

近年来，相关学者已经计算了许多线性链的电阻距离、基尔霍夫指标和加法度(乘法度 -) 基尔霍夫指标. 例如，线性多边形链、线性六角形链、六角形链、梯形图、梯形链、线性多项式链等.

2020 年，Zhang 等[47] 刻画了随机聚苯乙烯链的舒尔茨指标、古特曼指标、乘法度 - 基尔霍夫指标和加法度 - 基尔霍夫指标的期望值.

定理 4.1[47] 设 $n \geqslant 1$，则随机聚苯乙烯链 G_n 的乘法度 - 基尔霍夫指标的期望值为：

$$E(Kf^*(G_n))=\left(\frac{245}{3}-\frac{49}{9}p_1-\frac{196}{9}p_2\right)n^3+\left(\frac{7}{3}+\frac{49}{3}p_1+\frac{196}{3}p_2\right)n^2-\left(13+\frac{98}{9}p_1+\frac{392}{9}p_2\right)n-1.$$

定理 4.2[47] 设 $n \geqslant 1$，则随机聚苯乙烯链 G_n 的加法度 - 基尔霍夫指标的期望值为：

$$E(Kf^+(G_n))=\frac{n}{3}[210-14p_1-56p_2)n^2+(59+42p_1+168p_2)n-28p_1-112p_2-59]-\left(13+\frac{98}{9}p_1+\frac{392}{9}p_2\right)n-1.$$

2021 年，Zhang 等[48] 建立了方差的显式解析表达式，以及随机聚苯乙烯链的古特曼指标、舒尔茨指标、可乘度基尔霍夫指标和可加度基尔霍夫指标，并且证明了随机聚苯乙烯链的这 4 个指标是渐近正态分布. 李佳建和王维忠[49] 通过求解差分方程，建立了随机多边形链中基尔霍夫指标、乘法度 - 基尔霍夫指标和加法度 - 基尔霍夫指标期望值的显式解析表达式.

定理 4.3[49] 设 PC_n 是一个 n 长的 $(2k+1)$- 多边形链，其中 $k \geqslant 1$ 且 $n \geqslant 2$，则

$$Kf(PC_n)=Kf(PC_{n-1})+(2k+1)r(v_{n-1} \mid PC_{n-1})+\left(\frac{4}{3}k^3+6k^2+\frac{14}{3}k+1\right)n-\left(\frac{2}{3}k^3+5k^2+\frac{13}{3}k+1\right).$$

定理 4.4[49] 设 PC_n 是一个 n 长的 $(2k+1)$- 多边形链，其中 $k \geqslant 1$ 且 $n \geqslant 2$，则

$$Kf^*(PC_n)=Kf^*(PC_{n-1})+\left[(4k+4)\sum_{v \in V(PC_{n-1})} d(v)r(v_{n-1},v)\right]+\frac{n}{3}(16k^3+80k^2+100k+36)-\frac{1}{3}(8k^3+68k^2+108k+45).$$

定理 4.5[49] 设 PC_n 是一个 n 长的 $(2k+1)$- 多边形链，其中 $k \geqslant 1$ 且 $n \geqslant 2$，则

$$Kf^+(PC_n)=Kf^+(PC_{n-1})+\left[(2k+1)\sum_{v \in V(PC_{n-1})} d(v)r(v_{n-1},v)+(4k+4)r(v_{n-1} \mid PC_{n-1})\right]+\left(\frac{16}{3}k^3+\frac{76}{3}k^2+\frac{78}{3}k+7\right)n-\left(\frac{8}{3}k^3+\frac{64}{3}k^2+\frac{80}{3}k+8\right).$$

定理 4.6[49] 设 PC_n 是一个 n 长的 $2k$- 多边形链，其中 $k \geqslant 2$ 且 $n \geqslant 2$，则

$$Kf(PC_n)=Kf(PC_{n-1})+2kr(v_{n-1} \mid PC_{n-1})+\frac{n}{3}(4k^3+12k^2-k)-\frac{1}{6}(4k^3+24k^2-k).$$

定理 4.7[49] 设 PC_n 是一个 n 长的 $2k$- 多边形链，其中 $k \geqslant 2$ 且 $n \geqslant 2$，则

$$Kf^*(PC_n)=Kf^*(PC_{n-1})+\left[(4k+2)\sum_{v \in V(PC_{n-1})} d(v)r(v_{n-1},v)\right]+\frac{n}{3}(16k^3+56k^2+32k+4)-\frac{1}{3}(8k^3+56k^2+46k+7).$$

定理 4.8[49]　设 PC_n 是一个 n 长的 $2k$- 多边形链，其中 $k \geqslant 2$ 且 $n \geqslant 2$，则

$$Kf^{+}(PC_n) = Kf^{+}(PC_{n-1}) + [2k \sum_{v \in V(PC_{n-1})} d(v) r(v_{n-1}, v)] + (4k+2) r(v_{n-1} \mid PC_{n-1}) + \frac{n}{3}(16k^3 + 52k^2 + 14k - 1) - \frac{1}{3}(8k^3 + 52k^2 + 22k - 1).$$

2020 年，彭颖君[50] 研究了线性六四角链、线性八四对角链、Möbius 线性六四环链的(乘法度 -) 基尔霍夫指标.

近年来，关于网络图的基尔霍夫指标的研究吸引了许多研究者的注意，如:有线网络、集群网络、电晕或星团网络、星形和锥形网络等. 特别地，2020 年，Huang 等[51] 得到了线性六边形(圆柱形) 链的电阻距离和基尔霍夫指标公式，并给出了线性六边形(圆柱形) 链电阻距离的单调性和一些渐近性质;Sardar 等[52] 得到了链硅酸盐网络和环硅酸盐网络的电阻距离和基尔霍夫指标公式. 2021 年，Palacios 等[53] 刻画了高对称图簇的 Kemeny 常数和基尔霍夫指标公式;Kook 等[54] 给出了单纯网络的基尔霍夫指标的计算公式，利用此公式得到了代数连通性和基尔霍夫指标的高维类似物的一个不等式，并提出这些量作为单纯复形鲁棒性的度量.

4.2　基尔霍夫指标与其他指标的关系

2006 年，Gutman 和周波[55] 定义了图 G 的拉普拉斯能量:

$$LE = LE(G) = \sum_{i=1}^{n} \left| u_i - \frac{2m}{n} \right|.$$

2008 年，柳柏濂等[56] 定义了图 G 的拟拉普拉斯能量:

$$LEL = LEL(G) = \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{u_k}.$$

2012 年，Das 等[57] 比较了 $Kf(G)$ 和 $LEL(G)$，并建立了 $LEL(G) < Kf(G)$ 的两个充分条件.

定理 4.9[57]　设 G 是一个有 m 条边的 n 阶连通图，最小度为 δ. 若 $2m \leqslant (n-2)n^{\frac{2}{3}} + \delta$，则

$$LEL(G) < Kf(G).$$

定理 4.10[57]　设 G 是一个有 m 条边的 n 阶连通图. 若 $2m \leqslant (n-1)n^{\frac{2}{3}}$，则

$$LEL(G) < Kf(G).$$

2018 年，Das 和 Gutman[58] 得到了拟拉普拉斯能量 LEL 与基尔霍夫指标 Kf、拉普拉斯能量 LE 与基尔霍夫指标 Kf 的两个关系.

定理 4.11[58]　设 G 是一个有 m 条边的 $n(>2)$ 阶连通图，Δ 为顶点最大度，则

$$(Kf(G) - \frac{n}{\Delta+1})(M_1(G) + 2m - (\Delta+1)^2) \geqslant n(LEL(G) - \sqrt{\Delta+1})^2,$$

等式成立当且仅当 $G \cong K_n$ 或 $G \cong K_{1,n-1}$.

定理 4.12[58]　设 G 是一个有 m 条边的 $n(>2)$ 阶连通图，则

$$(Kf(G) - \frac{n}{\Delta+1})(M_1(G) + 2m - k^2) \geqslant n(LEL(G) - \sqrt{k})^2,$$

其中 $u_1 \geqslant k \geqslant \Delta + 1$($\Delta$ 为顶点最大度).

定理 4.13[58]　设 G 是一个有 m 条边的 n 阶连通图，则

$$(LE(G) - \frac{2m}{n}) \leqslant 4m^2 [\frac{2m}{n^3} Kf(G) - \frac{(n-2)}{n}],$$

等式成立当且仅当 $G \cong K_n$，或 $u_1 = u_2 = \cdots u_p$，$u_{p+1} = u_{p+2} = \cdots = u_{n-1}$ $(1 \leqslant p \leqslant n-2)$，并且 $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_{n-1}} = \frac{n}{m}$.

定理 4.14[58]　设 G 是一个有 m 条边的 $n(>2)$ 阶连通图，则

$$Kf(G)(M_1(G) + 2m) \geqslant nLEL^2(G),$$

等式成立当且仅当 $G \cong K_n$.

2020 年，Milošević 等[59] 得到了基尔霍夫指标、图的拉普拉斯能量和度偏差之间的关系. 这里 $M_1(G)=\sum_{i=1}^{n} d_i^2$，$F(G)=\sum_{i=1}^{n} d_i^3$，$S(G)=\sum_{i=1}^{n}\left|d_i-\frac{2m}{n}\right|$，$C_3(G)$为循环圈的个数.

定理 4.15[59] 设 G 是一个有 m 条边的 $n(\geqslant 2)$ 阶连通图，则

$$n\left(LE(G)-\frac{2m}{n}\right)^2 \leqslant Kf(G)\left(F(G)+\frac{3n-4m}{n}M_1(G)-6C_3(G)+\frac{8m^2(m-n)}{n^2}\right),$$

等式成立当且仅当 $G\cong K_n$，或 $u_1=u_2=\cdots u_p$，$u_{p+1}=u_{p+2}=\cdots=u_{n-1}(1\leqslant p\leqslant n-2)$，并且 $n(u_1^2+u_{n-1}^2)=2m(u_1+u_{n-1})$.

定理 4.16[59] 设 G 是一个有 m 条边的 $n(\geqslant 2)$ 阶连通图，则

$$nLEL^4(G)\leqslant 8m^3Kf(G),$$

等式成立当且仅当 $G\cong K_n$.

定理 4.17[59] 设 G 是一个有 m 条边的 $n(\geqslant 2)$ 阶连通图，则

$$Kf(G)\geqslant \frac{n^2(n-1)-2m}{2m}+\frac{n-1}{4m^2}\left(\frac{(n\Delta-2m)^2}{\Delta}+\frac{(nS(G)+2m-n\Delta)^2}{2m-\Delta}\right),$$

等式成立当且仅当 $G\cong K_n$，或 $G\cong K_{1,n-1}$，或 $G\cong \Gamma_d$.

定理 4.18[59] 设 G 是一个有 m 条边的 $n(\geqslant 2)$ 阶连通图，则

$$Kf(G)\geqslant \frac{n^2(n-1)-2m}{2m}+\frac{n^2(n-1)}{4m^2}\left(\frac{(\Delta-\frac{2m}{n})^2}{\Delta}+\frac{(\delta-\frac{2m}{n})^2}{\delta}+\frac{(S(G)-\Delta+\delta)^2}{2m-\Delta-\delta}\right),$$

等式成立当且仅当 $G\cong K_n$，或 $G\cong K_{1,n-1}$，或 $G\cong \Gamma_d$.

定理 4.19[59] 设 G 是一个有 m 条边的 $n(\geqslant 2)$ 阶连通图，则

$$8m^3(Kf(G)+1)-n^2(n-1)S^2(G)\geqslant 4n^2(n-1)m^2,$$

等式成立当且仅当 $G\cong K_n$ 或 $G\cong \Gamma_d$.

定理 4.20[59] 设 G 是一个有 m 条边的 $n(\geqslant 2)$ 阶连通图，则

$$(Kf(G)+1)\left(F(G)-\frac{4m}{n}M_1(G)+\frac{8m^3}{n^2}\right)\geqslant (n-1)S^2(G),$$

等式成立当且仅当 G 是正则图.

对于一些特殊图类，如赋权图、赋权轮图、具有固定割顶点数的图、完全多部图、莫比乌斯阶梯($M_n=C_{2n}(1,n)$) 和棱镜图($Pr_n=C_n\times P_2$)[60] 的 Kirchhoff 指标也分别得到了刻画. 特别地，2018 年 Mitsuhashi 等[61] 首次提出加权基尔霍夫指标，并给出正则覆盖图的基尔霍夫指标;2021 年，Lin 等[62] 给出了混合图的埃尔米特基尔霍夫指标与鲁棒性;2017 年，刘家保[63] 在《电阻距离和基尔霍夫指标的研究》中刻画了双圈图、仙人掌图、超立方体网络等的基尔霍夫指标，并得到了一些新的有意义的结果.

定理 4.21[60] 莫比乌斯阶梯($M_n=C_{2n}(1,n)$) 的基尔霍夫指标为：

$$Kf(M_n)=\frac{n^3-n}{6}+\frac{n^2\tanh\left(\frac{n}{2}\operatorname{arccosh}2\right)}{\sqrt{3}}.$$

定理 4.22[60] 棱镜图($Pr_n=C_n\times P_2$) 的基尔霍夫指标为：

$$Kf(Pr_n)=\frac{n^3-n}{6}+\frac{n^2\coth\left(\frac{n}{2}\operatorname{arccosh}2\right)}{\sqrt{3}}.$$

5 一些猜想和未解决的问题

1)2020 年，文献[46] 研究了在 n，m，k 中求最小基尔霍夫指标的问题，即求最小值给定 k- 分布性图的基尔霍夫指标. 该文章从理论上部分地解决了这个问题，并提出了采用包括穷举搜索和3 种计算策略在内的算法

来解决问题. 然而，在 n，m，k 中具有最小基尔霍夫指标的最优图的完全刻画问题尚有待进一步解决.

2）文献[50]的最后提出了一些尚待解决的问题：

（a）可以进一步考虑对有一个割点的线性六四角链的分子图的拉普拉斯谱以及基尔霍夫指标和支撑数目的研究；

（b）可以进一步考虑对 Möbius 线性八四对角链的拉普拉斯谱及基尔霍夫指标和支撑树数目，以及正规拉普拉斯谱及度基尔霍夫指标与支撑数目的研究；

（c）可以进一步对四边形、六边形及八边形在一个线性链中同时出现或对非线性及其他边形的角链类型的相关问题进一步研究.

3）在第 2 节中，就单圈图而言，可以考虑加一些限制条件的单圈图，如具有完美匹配的单圈图和确定悬挂点个数的单圈图. 对于双圈图，可以继续考虑具有 3 个圈的双圈图的基尔霍夫指标.

4）2021 年，文献[54]中提出了一个开放的问题，并给出下列恒等式的组合证明：

$$n^{\binom{n-2}{d-1}^{-1}} \times \sum_{\delta \in \Sigma_d} k_d(X/\delta) = \sum_{(F,\ R) \in RF(X)} |H_{d-1}(F,\ R)|^2.$$

5）2020 年，文献［64］中的定理 6 认为在所有具有任意固定直径的二部图中，基尔霍夫指标最小和最大的图可以用同样的方法确定. 但是在所有直径大于 3 的二部图中刻画第二小、第三小以及第二大和第三大的基尔霍夫指标将是一个非常具有挑战性的问题.

［参考文献］

［1］KLEIN D J，RANDIĆ M. Resistance distance［J］. Journal of Mathematical Chemistry，1993，12（1）：81－95.

［2］GHOSH A，BOYD S，SABERI A. Minimizing effective resistance of a graph［J］. Siam Review，2008，50（1）：37－66.

［3］ELLENS W，SPIEKSMA F M，MIEGHEM P V，et al. Effective graph resistance［J］. Linear Algebra and its Applications，2011，435（10）：2491－2506.

［4］GUTMAN I，MOHAR B. The qusai-wiener and the Kirchhoff indices coincide［J］. Journal of Chemical InforMation & Modeling，1996，36（5）：982－985.

［5］ZHU H Y，KLEIN D J，LUKOVITS I. Extensions of the Wiener number［J］. Journal of Chemical Information and Computer Sciences，1996，36（3）：420－428.

［6］YANG Y J，KLEIN D J. A recursion formula for resistance and its applications［J］. Discrete Applied Mathematics，2013，161：2702－2715.

［7］CHEN H Y，ZHANG F J. Resistance distance and the normalized Laplacian spectrum［J］. Discrete Applied Mathematics，2007，155（5）：654－661.

［8］GUTMAN I，FENG L，YU G. Degree resistance distance of unicyclic graphs［J］. Transactions on Combinatorics，2012，1（2）:27－40.

［9］XING R D，ZHOU B. On hyper-Kirchhoff index［J］. Mathematical and Computer Modelling，2011，54：2326－2337.

［10］GAO X，LUO Y F，LIU W W. Kirchhoff index in line，subdivision and total graphs of a regular graph［J］. Discrete Applied Mathematics，2012，160：560－565.

［11］YOU Z F，YOU L H，HONG W X. Comment on“Kirchhoff index in line，subdivision and total graphs of a regular graph”［J］. Discrete Applied Mathematics，2013，161：3100－3103.

［12］WANG W Z，YANG D，LUO Y F. The Laplacian polynomial and Kirchhoff index of graphs derived from regular graphs［J］. Discrete Applied Mathematics，2013，161：3063－3071.

［13］YANG Y J. Computing the Kirchhoff index of some xyz-transformations of regular molecular graphs［J］. International Conference on Intelligent Computing，2014，858：173－183.

［14］YANG Y J. The Kirchhoff index of subdivisions of graphs［J］. Discrete Applied Mathematics，2014，171：153－157.

［15］SUN L，WANG W，ZHOU J，et al. Some results on resistance distances and resistance matrices［J］. Linear & Multilinear Algebra，2015，63（3）：523－533.

［16］YANG Y J，KLEIN D K. Resistance distance-based graph invariants of subdivisions and triangulations of graphs［J］. Discrete Applied Mathematics，2015，181：260－274.

[17] LIU X G, ZHOU J, BU G J. Resistance distance and Kirchhoff index of R-vertex join and R-edge join of two graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2015, 187: 130 – 139.

[18] 卢鹏丽，张腾，苗玉芳. Q-图的电阻距离 [J]. 兰州理工大学学报（自然科学版），2016，42（5）：160 – 162.

[19] LIU Q, LIU J B, CAO J D. The Laplacian polynomial and Kirchhoff index of graphs based on R-graphs [J]. Neurocomputing, 2016, 177: 441 – 446.

[20] XIE P C, ZHANG Z Z, COMELLAS F. The normalized Laplacian spectrum of subdivisions of a graph [J]. Applied Mathematics and Computation, 2016, 286: 250 – 256.

[21] SUN L Z, SHANG Z Y, BU C J. Resistance distance and Kirchhoff index of the Q-vertex (or edge) join graphs [J]. Discrete Mathematics, 2021, 344: 130 – 139.

[22] NORDHAUS E A, GADDUM J W. On complementary graphs [J]. Amer Math Monthly, 1956, 63: 175 – 177.

[23] ZHOU B, TRINAJSTIĆ N. A note on Kirchhoff index [J]. Chemical Physics Letters, 2008, 455: 120 – 123.

[24] YANG Y J, ZHANG H P, KLEIN D J. New Nordhaus-Gaddum-Type results for the Kirchhoff index [J]. Journal of Mathematical Chemistry, 2011, 49 (8): 1587 – 1598.

[25] DAS K C, YANG Y J. Nordhaus-Gaddum-Type results for resistance distance-based graph invariants [J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 2016, 36 (3): 695 – 707.

[26] YANG Y J, CAO Y L, YAO H Y, et al. Solution to a conjecture on a Nordhaus-Gaddum type result for the Kirchhoff index [J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 332: 241 – 249.

[27] YANG Y J, JIANG X Y. Unicyclic graphs with extremal Kirchhoff index [J]. Match Communications in Mathematical & in Computer Chemistry, 2008, 60: 107 – 120.

[28] GUO Q, DENG H Y, CHEN D. The extremal Kirchhoff index of a class of unicyclic graphs [J]. Match Communications in Mathematical & in Computer Chemistry, 2009, 61: 713 – 722.

[29] FENG L, LIU W, YU G, et al. The degree Kirchhoff index of fully loaded unicyclic graphs and cacti [J]. Utilitas mathematica, 2014, 95: 149 – 159.

[30] QI X L, ZHOU B. On the degree Kirchhoff index of unicyclic graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2020, 284: 86 – 98.

[31] CHEN X D, HAO G L, JIN D Q. On the ordering of the Kirchhoff indices of the complements of trees and unicyclic graphs [J]. Applied Mathematics, 2020, 35 (3): 308 – 320.

[32] CHEN Y L, YAN W G. On the Kirchhoff index of a unicyclic graph and the matchings of the subdivision [J]. Discrete Applied Mathematics, 2021, 300: 19 – 24.

[33] ZHANG H P, JIANG X Y, YANG Y J. Bicyclic graphs with extremal Kirchhoff index [J]. Match Communications in Mathematical & in Computer Chemistry, 2009, 61: 697 – 712.

[34] HUANG J, LI S C, ZHAO Q. On extremal bipartite bicyclic graphs [J]. J Math Anal Appl, 2016, 436: 1242 – 1255.

[35] LIU J B, PAN X F, YU L, et al. Complete characterization of bicyclic graphs with minimal Kirchhoff index [J]. Discrete Applied Mathematics, 2016, 200: 95 – 107.

[36] FEI J Q, TU J H. Complete characterization of bicyclic graphs with the maximum and second-maximum degree Kirchhoff index [J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 330: 118 – 124.

[37] DENG Q, CHEN H. On the Kirchhoff index of the complement of a bipartite graph [J]. Linear Algebra and its Applications, 2013, 439: 167 – 173.

[38] PALACIOS J L, RENOM J M. Bounds for the Kirchhoff Index of regular graphs via the spectra of their random walks [J]. International Journal of Quantum Chemistry, 2010, 110: 1637 – 1641.

[39] PALACIOS J L, RENOM J M. Broder and Karlin's formula for hitting times and the Kirchhoff Index [J]. International Journal of Quantum Chemistry, 2011, 111 (1): 35 – 39.

[40] DAS K C. On the Kirchhoff index of graphs [J]. Ztschrift Fur Naturforschung A, 2013, 68 (8/9): 531 – 538.

[41] MATEJIĆ M M, MILOVANOVIĆ I E I, MILOŠEVIĆ P D, et al. A note on the Kirchhoff index of graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2019, 2 (3): 1 – 6.

[42] MILOVANOVIĆ I, GLOGIĆ E, MATEJIÆ M, et al. On relation between the Kirchhoff index and number of spanning trees of graphs [J]. Communications in Combinatorics and Optimization, 2020, 5 (1): 1 – 8.

[43] YAN W G, YEH Y N, ZHANG F J. The asymptotic behavior of some indices of iterated line graphs of regular graphs [J].

Discrete Applied Mathematics，2012，160：1232－1239.

[44] TIAN G X. The asymptotic behavior of (degree-) Kirchhoff indices of iterated total graphs of regular graphs [J]. Discrete Applied Mathematics，2017，233 (31)：224－230.

[45] HE W，LI H，XIAO S. On the minimum Kirchhoff index of graphs with a given vertex k-partiteness and edge k-partiteness [J]. Applied Mathematics and Computation，2017，315 (1)：313－318.

[46] HUANG G X，HE W H，TAN Y Y. Theoretical and computational methods to minimize Kirchhoff index of graphs with a given edge k-partiteness [J]. Applied Mathematics and Computation，2019，341 (15)：348－357.

[47] ZHANG L L，LI Q S，LI S C，et al. The expected values for the Schultz index，Gutman index，multiplicative degree-Kirchhoff index and additive degree-Kirchhoff index of a random polyphenylene chain [J]. Discrete Applied Mathematics，2020，282：243－256.

[48] ZHANG J L，PENG X H，CHEN H L. The limiting behaviours for the Gutman index，Schultz index，multiplicative degree-Kirchhoff index and additive degree-Kirchhoff index of a random polyphenylene chain [J]. Discrete Applied Mathematics，2021，299：62－73.

[49] LI J J，WANG W Z. The (degree-) Kirchhoff indices in random polygonal chains [J]. Discrete Applied Mathematics，2021，304 (15)：63－75.

[50] 彭颖君. 图的谱参数与结构及相关应用研究 [D]. 武汉：华中师范大学，2020.

[51] HUANG S M，LI S C. On the resistance distance and Kirchhoff index of a linear hexagonal (cylinder) chain [J]. Physica A (Statistical Mechanics and its Applications)，2020，558 (1)：124－139.

[52] SARDAR M S，PAN X F，XU S A. Computation of resistance distance and Kirchhoff index of the two classes of silicate networks [J]. Applied Mathematics and Computation，2020，381 (15)：125－130.

[53] PALACIOS J L，MARKOWSKY G. Kemeny's constant and the Kirchhoff index for the cluster of highly symmetric graphs [J]. Applied Mathematics and Computation，2021，406：156－168.

[54] KOOK W，LEE K J. Kirchhoff index of simplicial networks [J]. Linear Algebra and its Applications，2021，626：1－19.

[55] GUTMAN I，ZHOU B. Laplacian energy of a graph [J]. Linear Algebra and its Applications，2006，414：29－37.

[56] LIU J P，LIU B L. A Laplacian-energy-like invariant of a graph [J]. MATCH Communications in Mathematial and in Computer Chemistry，2008，59：355－372.

[57] DAS K C，XU K Y，GUTMAN I. Comparison between Kirchhoff index and the Laplacian-energy-like invariant [J]. Linear Algebra and its Applications，2012，436：3661－3671.

[58] DAS K C，GUTMAN I. On Laplacian energy，Laplacian-energy-like invariant and Kirchhoff index of graphs [J]. Linear Algebra and its Applications，2018，554：170－184.

[59] MILOŠEVIĆ P，MILOVANOVIĆ E，MATEJIĆ M，et al. On relations between Kirchhoff index，Laplacian energy，Laplacian-energy-like invariant and degree deviation of graphs [J]. Filomat，2020，34 (3)：1025－1033.

[60] BAIGONAKOVA G A，MEDNYKH A D. Elementary formulas for Kirchhoff index of Möbius ladder and prism graphs [J]. Siberian Electronic Mathematical Reports，2019，16：1654－1661.

[61] MITSUHASHI H，MORITA H，SATO I. The weighted Kirchhoff index of a graph [J]. Linear Algebra and its Applications，2018，547：1－18.

[62] LIN W，ZHOU S M，LI M，et al. The Hermitian Kirchhoff index and robustness of mixed graph [J]. Mathematical Problems in Engineering，2021，2021：1－10.

[63] 刘家保. 电阻距离和基尔霍夫指标的研究 [M]. 合肥：中国科学技术大学出版社，2017.

[64] JIANG X J，HE W H，LIU Q，et al. On the Kirchhoff index of bipartite graphs with given diameters [J]. Discrete Applied Mathematics，2020，283 (2)：512－521.