昆明学院学报　2019, 41 (6): 78 ~ 84　ISSN 1674 - 5639　CN 53 - 1211/G4
Journal of Kunming University

一类广义非自治非线性 Kirchhoff 型方程的拉回吸引子

吕鹏辉，吕小俊*，杨吉根
（云南大学旅游文化学院 信息学院，云南 丽江 674199）

摘要：在 R^N 的有界域上，研究一类广义非自治非线性 Kirchhoff 型方程 $u_{tt}+\alpha u_t-\beta\Delta u_t-\phi(\|\nabla u\|^2)\Delta u+(1+|u|^2)^{p-1}u=f(x,t)$ 的拉回吸引子的存在性. 为得到拉回吸引子的存在性，首先证明方程在 $(H^2\cap H_0^1)\times H_0^1$ 的整体解，随后进一步证明存在拉回吸收集，最后证明满足条件（PDC），从而得到方程对应的过程 $\{U(t,\tau)\}$ 在相空间 $(H^2\cap H_0^1)\times H_0^1$ 中存在拉回吸引子.

关键词：非自治 Kirchhoff 方程；整体解；拉回吸收集；拉回吸引子
中图分类号：O175　**文献标识码**：A　**文章编号**：1674 - 5639（2019）06 - 0078 - 07
DOI：10. 14091/j. cnki. kmxyxb. 2019. 06. 015

Pullback Attractors for a Class of Generalized Non-autonomous Nonlinear Kirchhoff Type Equations

LV Penghui，LV Xiaojun*，YANG Jigen
（College of Information，Tourism and Cultural College Yunnan University，Lijiang，Yunnan，China　674199）

Abstract: The existence of pullback attractors for a class of generalized non - autonomous nonlinear Kirchhoff type equations on bounded domains of R^N: $u_{tt}+\alpha u_t-\beta\Delta u_t-\phi(\|\nabla u\|^2)\Delta u+(1+|u|^2)^{p-1}u=f(x,t)$ was studied. In order to obtain the existence of the pullback attractors, firstly, we prove the global solution of the equation, then the existence of the pullback absorbing set is obtained, and by proving the condition (PDC), the existence of the pullback attractor of the process $\{U(t,\tau)\}$ in the phase space $(H^2\cap H_0^1)\times H_0^1$ is acquired.
Key words: non-autonomous Kirchhoff equations; global solutions; pullback absorbing set; pullback attractors

本文研究下列非线性 Kirchhoff 型方程的拉回吸引子：

$$u_{tt}+\alpha u_t-\beta\Delta u_t-\phi(\|\nabla u\|^2)\Delta u+(1+|u|^2)^{p-1}u=f(x,t)\ \text{in}\ \Omega\times[\tau,\infty); \tag{1}$$

$$u(x,\tau)=u_0(x);u_t(x,\tau)=u_1(x),x\in\Omega; \tag{2}$$

$$u(x,t)|_{\partial\Omega}=0,t\geqslant\tau. \tag{3}$$

其中，Ω 是 R^N 中具有光滑边界的有界域，$p\geqslant1$，且 α，β 都是正常数，而有关 $\phi(\|\nabla u\|^2)$，$f(x,t)$ 的假设将在后文中给出.

近 30 年来，自治动力系统和其吸引子已有较多研究[1-4]. 而非自治无穷维动力系统的研究则相对较少. 在非自治实例中，半群变成为过程，即一个算子依赖于两个参数[4-5]，我们将其称为由过程形成的一致吸引子. 然而，在有些非自治系统中当时间趋于无穷时，轨道会变为无界，则这时常规的一致吸引子的理论将不再适用. 为解决这一问题，数学家们提出了适用于非自治和随机系统中的拉回吸引子理论. 随着该理论的提出，关于非自治无穷维动力系统越来越引起人们重视，而且对非自治系统的拉回吸引子进行了许多深入研究[5-14]. 例如：Anh 等[5] 研究了一类非自治非经典扩散方程 $u_t-\varepsilon\Delta u_t-\Delta u+f(u)=g(t)$ 的拉回吸引子；Zelik[6] 证明了在临界指数增长条件下，非自治阻尼波方程 $u_{tt}+\gamma u_t-\Delta u+f(u)=g(t)$ 解的渐近正则性.

收稿日期：2019 - 10 - 10
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11161025）；云南大学旅游文化学院重点资助项目（2015XYZ03）.
作者简介：吕鹏辉（1989—），男，福建龙岩人，讲师，主要从事非线性偏微分方程研究.
* **通讯作者**：吕小俊（1986—），男，内蒙古丰镇人，副教授，主要从事微分方程与动力系统研究，E-mail：15912469286@163. com.

Wang[7]研究了下列具有临界指数性非自治波方程的拉回吸引子的存在性：

$$u_{tt}+\eta u_t-\Delta u+u_t+f(u)=g(x,t),\tag{4}$$

该文为证明拉回吸引子的存在性，首先根据拉回 $D-$渐近紧概念给出了非自治动力系统拉回吸引子的存在性，随后给出新方法证明拉回 $D-$渐近紧性.

雍鸿雄等[8]研究了下列非自治吊桥方程的拉回吸引子：

$$u_{tt}+u_{xxxx}+\mu u_t+\kappa^2u^++g(u,t)=f(x,t),\tag{5}$$

该文证明了非自治吊桥方程当非线性项 $g(u,t)$ 和外力项 $f(x,t)$ 都与时间 t 有关且平移有界时解的渐近性行为，并由此获得了方程在 $H^2(0,\ L)\cap H_0^1(0,\ L)\times L^2(0,\ L)$ 中的拉回 $D-$吸引子的存在性.

为方便读者，本文结构如下：在文章第 1 部分中，给出主要记号和主要拉回 $D-$吸引子的相关理论. 第 2 部分，证明了方程对应的过程 $\{U(t,\ \tau)\}$ 在相空间 $(H^2\cap H_0^1)\times H_0^1$ 的拉回 $D-$吸收集存在性. 第 3 部分，证明了方程对应的过程 $\{U(t,\ \tau)\}$ 在相空间 $(H^2\cap H_0^1)\times H_0^1$ 中存在拉回 $D-$吸引子.

1　预备知识

为叙述方便，引入下列符号：

$$L^p=L^p(\Omega),W^{k,p}=W^{k,p}(\Omega),H^k=W^{k,2},H=L^2,\|\cdot\|=\|\cdot\|_{L^2},$$

$$\|\cdot\|_p=\|\cdot\|_{L^p},V_2=H^2\cap H_0^1,V_{2'}=V_{-2},X=V_2\times H_0^1,$$

其中 $p\geqslant1$，$W^{-1,p'}$ 为 $W_0^{1,p}$ 的共轭空间，$p'=p/(p-1)$. H^k 是 L^2-内积下的 Sobolev 空间，同时 H_0^k 表示 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 H^k 中的闭包（$k>0$），符号（·，·）表示 $H-$内积.

设 $\{U(t,\ \tau):\ t\geqslant\tau,\ \tau\in R\}$ 是在空间 X 的一个过程. 过程 $\{U(t,\ \tau)\}$ 称为是闭的，如果在 X 中，对所有 $t\geqslant\tau$，$\tau\in R$，当 $x_n\to x$ 时，$U(t,\ \tau)x_n\to U(t,\ \tau)x$.

文献［10］指出，连续及强连续的过程都是闭的，反之则不然.

设 $P(X)$ 为度量空间 X 所有有界子集的集合，D 为参数化集合 $\hat{D}=\{D(t):\ t\in R\}\subset P(X)$ 的一个非空域.

定义 1　过程 $\{U(t,\ \tau)\}$ 叫做拉回 $D-$渐近紧，如果任意 $t\in R$，$\hat{D}\in D$，任意序列 $\tau_n\to-\infty$，及任意序列 $x_n\in D(\tau_n)$，序列 $\{U(t,\ \tau_n)x_n\}$ 在 X 中是相对紧的.

定义 2　过程 $\{U(t,\ \tau)\}$ 称满足拉回条件（PDC），如果任意固定时间 $t\in R$，$\hat{D}\in D$，且任意 $\eta>0$，存在 $\tau_0=\tau_0(\hat{D},\ \eta,\ t)\leqslant t$ 及一个 X 的有限维子空间 X_1，使得：

1）$P(\cup_{\tau\leqslant\tau_0}U(t,\ \tau)D(\tau))$ 是有界的；

2）$\|(I-P)y\|\leqslant\eta$，$\forall y\in\cup_{\tau\leqslant\tau_0}U(t,\ \tau)x$，$\forall x\in D(\tau)$.

其中 P：$X\to X_1$ 是投影算子，I 为恒等变换.

引理 1[6]　满足拉回条件（PDC）的过程 $\{U(t,\ \tau)\}$ 称拉回 $D-$渐近紧.

定义 3[10]　一族有界集 $\hat{B}=\{B(t)\mid t\in R\}$ 称为过程 $\{U(t,\ \tau)\}$ 的拉回 $D-$吸收集，如果任意时间 $t\in R$，$\hat{D}\in D$，存在 $\tau_0=\tau_0(\hat{D},\ \eta,\ t)\leqslant t$，使得：

$$\bigcup_{\tau\leqslant\tau_0}U(t,\ \tau)D(\tau)\subset B(t).$$

定义 4[10]　族 $\hat{A}=\{A(t):\ t\in R\}\subset B(X)$ 称为 $\{U(t,\ \tau)\}$ 的拉回 $D-$吸引子，如果满足以下条件：

1）$\hat{A}(t)$ 对于所有时间 $t\in R$ 是紧的；

2）$\hat{A}$ 是不变的，即 $U(t,\tau)A(\tau)=A(t)$，对所有的 $t\geqslant\tau$；

3）$\hat{A}$ 是拉回 $D-$吸引的，即 $\lim\limits_{\tau\to-\infty}dist(U(t,\ \tau)D(\tau),\ A(t))=0$，对所有 $\hat{D}\in D$ 及 $t\in R$；

4）如果 $\{C(t):\ t\in R\}$ 是另外一个闭吸引集族，则对所有的 $t\in R$，满足 $A(t)\subset C(t)$. 其中 $dist$ 是指 Hausdorff半距离，定义为 $dist(A,\ B)=\sup\limits_{x\in A}\inf\limits_{y\in B}d(x,\ y)A,\ B\subset X$.

定理 1[6] 设过程$\{U(t,\ \tau)\}$是一个闭过程且拉回 D – 渐近紧，如果存在一族拉回 D – 有界集 $\hat{B}=\{B(t:\ t\in R)\}\in D$，则$\{U(t,\ \tau)\}$存在一个唯一拉回$D$ – 吸引子 $\hat{A}=\{A(t):\ t\in R\}$，且$A(t)=\bigcap_{s\leqslant t}\overline{\bigcup_{\tau\leqslant s}U(t,\ \tau)B(\tau)}$.

2 拉回 D – 吸收集的存在性

定理 2 假定：

(H_1) $\phi\in C^1(\mathbf{R}^+),\phi'(s)\geqslant 0,\phi(0)\overset{\Delta}{=}\phi_0\geqslant 1.$

(H_2) $\begin{cases}1\leqslant p<+\infty,\ N=1,\ 2,\\ 1\leqslant p\leqslant\dfrac{N-1}{N-2},\ N\geqslant 3.\end{cases}$

(H_3) $f\in L^2_{loc}(R,H),\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\sigma s}\|f(x,s)\|_H^2\mathrm{d}s<\infty$，其中 σ 是一个正常数.

问题（1）~（3）存在唯一整体解 $u\in L^\infty(\tau,+\infty;V_2),u_t\in L^\infty(\tau,+\infty;H_0^1)\cap L^2(\tau,T;V_2)$.

证明 该定理证明过程与文献［1］中定理的证明过程类似，可参阅该文献，此处不再详细证明.

评论 1 在定理 2 的条件下，可以得到 $\phi(s)$及 $\phi'(s)$是有界连续函数.

评论 2 由定理 2 定义映射 $U(t,\tau):X\to X,U(t,\tau)(u_0,u_1)=(u(t),u_t(t))$，其中 u 是问题(1)~(3)的解. 根据定理 2，$\{U(t,\ \tau)\}$构成 X 上的连续算子过程.

定理 3 在假设$(H_1)\sim(H_3)$条件下，由问题(1)~(3)得到的过程$\{U(t,\ \tau)\}$存在一族拉回 D – 吸收集.

证明 设 $v=u_t+\varepsilon u,0<\varepsilon\leqslant\min\{\frac{\alpha}{4},\frac{\lambda_1}{2\alpha},\frac{1}{2\beta}\}$，则 v 满足

$$v_t+(\alpha-\varepsilon)v+(\varepsilon^2-\alpha\varepsilon)u-\beta\Delta v+\beta\varepsilon\Delta u-\phi(\|\nabla u\|^2)\Delta u+(1+|u|^2)^{p-1}u=f(x,t). \tag{6}$$

由（6）式中的方程与 v 作 H 内积得到：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|^2+(\alpha-\varepsilon)\|v\|^2+(\varepsilon^2-\alpha\varepsilon)(u,v)+\beta\|\nabla v\|^2+\beta\varepsilon(\Delta u,v)-(\phi(\|\nabla u\|^2)\Delta u,v)$$
$$+((1+|u|^2)^{p-1}u,v)=(f(x,t),v). \tag{7}$$

类似于文献［1］处理过程，得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_1(t)+\sigma H_1(t)+\beta\|\nabla v\|^2\leqslant\frac{1}{\beta\lambda_1}\|f(x,t)\|^2+\frac{2\Omega}{p\varepsilon}\leqslant C(1+\|f(x,t)\|^2), \tag{8}$$

其中：$H_1(t)=\|v\|^2+\int_0^{\|\nabla u\|^2}\phi(s)\mathrm{d}s-\beta\varepsilon\|\nabla u\|^2+\frac{1}{p}\int_\Omega(1+|u|^2)^p\mathrm{d}x,\sigma$ 为很小一正常数.

利用 Gronwall 不等式得到：

$$H_1(t)\leqslant H_1(\tau)\mathrm{e}^{-\sigma(t-\tau)}+C(1+\mathrm{e}^{-\sigma t}\int_\tau^t\mathrm{e}^{\sigma s}\|f(x,s)\|^2\mathrm{d}s), \tag{9}$$

易知存在常数 a，使得$\|u_t\|^2+\|\nabla u\|^2\leqslant aH_1$，所以

$$\|u_t(t)\|^2+\|\nabla u(t)\|^2\leqslant aH_1(\tau)\mathrm{e}^{-\sigma(t-\tau)}+Ca(1+\mathrm{e}^{-\sigma t}\int_\tau^t\mathrm{e}^{\sigma s}\|f(x,s)\|^2\mathrm{d}s),$$

$$\begin{aligned}H_1(\tau)&=\|v(\tau)\|^2+\int_0^{\|\nabla u(\tau)\|^2}\phi(s)\mathrm{d}s-\beta\varepsilon\|\nabla u(\tau)\|^2+\frac{1}{p}\int_\Omega(1+|u(\tau)|^2)^p\mathrm{d}x\\&\leqslant\|u_1\|^2+\varepsilon\|u_0\|^2+\int_0^{\|\nabla u(\tau)\|^2}\phi(s)\mathrm{d}s-\beta\varepsilon\|\nabla u(\tau)\|^2+C\|u(\tau)\|^{\frac{2N-2}{N-2}}_{\frac{2N-2}{N-2}}\\&\leqslant C(\|u_1\|^2+\|\nabla u_0\|^2)+C,\end{aligned}$$

因此，$\|u_t(t)\|^2+\|\nabla u(t)\|^2\leqslant C\left[\mathrm{e}^{-\sigma(t-\tau)}(\|u_1\|^2+\|\nabla u_0\|^2+1)+1+\mathrm{e}^{-\sigma t}\int_\tau^t\mathrm{e}^{\sigma s}\|f(x,s)\|^2\mathrm{d}s\right]$

$$\leqslant C\Big[\mathrm{e}^{-\sigma(t-\tau)}(\|u_1\|^2+\|\nabla u_0\|^2+1)+1+\mathrm{e}^{-\sigma t}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\sigma s}\|f(x,s)\|^2\mathrm{d}s\Big],$$

其中 C 与 t，τ 无关.

（1）式中的方程分别与 $-\Delta u$，$-\Delta u_t$ 作 H 内积，得到：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\alpha\|\nabla u\|^2+2(u_t,-\Delta u)+\beta\|\Delta u\|^2]+\phi(\|\nabla u\|^2)\Delta u^2$$
$$=((1+|u|^2)^{p-1}u,\Delta u)+(f(x,t),-\Delta u),\tag{10}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u_t\|^2+\alpha\|\nabla u_t\|^2+\beta\|\Delta u_t\|^2=\phi(\|\nabla u\|^2)(\Delta u,\Delta u_t)+((1+|u|^2)^{p-1}u,\Delta u_t)$$
$$+(f(x,t),-\Delta u_t),\tag{11}$$

其中
$$|((1+|u|^2)^{p-1}u,\Delta u)|\leqslant\begin{cases}|(2^{p-1}u,\Delta u)|, & |u|<1,\\ |(2^{p-1}|u|^{2p-2}u,\Delta u)|, & |u|\geqslant 1.\end{cases}\tag{12}$$

由于
$$|(2^{p-1}u,\Delta u)|\leqslant\frac{1}{2}\|\Delta u\|^2+2^{2p-1}\|u\|^2,\tag{13}$$

$$|(2^{p-1}|u|^{2p-2}u,\Delta u)|\leqslant 2^{p-1}u_{4p-2}^{2p-1}\|\Delta u\|\leqslant C_2(\Omega,4p-2)\times 2^{p-1}\|\nabla u\|^{2p-1}\|\Delta u\|$$
$$\leqslant\frac{1}{8}\|\Delta u\|^2+2^{2p-1}C\cdot\|\nabla u\|^{4p-2}.\tag{14}$$

则
$$|((1+|u|^2)^{p-1}u,\Delta u)|\leqslant\frac{1}{4}\|\Delta u\|^2+2^{2p-1}\|u\|^2+2^{2p-1}C\cdot\|\nabla u\|^{4p-2},\tag{15}$$

$$|(f(x,t),-\Delta u)|\leqslant\frac{1}{4}\|\Delta u\|^2+\|f(x,t)\|^2.\tag{16}$$

同时得到：
$$|((1+|u|^2)^{p-1}u,\Delta u_t)|\leqslant\frac{\beta}{4}\|\Delta u_t\|^2+\frac{2^{2p-1}}{\beta}\|u\|^2+\frac{2^{2p-1}}{\beta}C\cdot\|\nabla u\|^{4p-2},\tag{17}$$

$$\phi(\|\nabla u\|^2)|(\Delta u,\Delta u_t)|\leqslant\frac{\beta}{8}\|\Delta u_t\|^2+2\frac{\phi^2(\|\nabla u\|^2)}{\beta}\|\Delta u\|^2,\tag{18}$$

$$|(f(x,t),-\Delta u_t)|\leqslant\frac{\beta}{8}\|\Delta u_t\|^2+\frac{2}{\beta}\|f(x,t)\|^2.\tag{19}$$

将（15）和（16）代入（10），得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\alpha\|\nabla u\|^2+2(u_t,-\Delta u)+\beta\|\Delta u\|^2]+\|\Delta u\|^2\leqslant 2^{2p}\|u\|^2+2^{2p}\cdot C\|\nabla u\|^{4p-2}+2\|f(x,t)\|^2:C_1.\tag{20}$$

将（17）~(19）代入(11)，得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u_t\|^2+2\alpha\|\nabla u_t\|^2+\beta\|\Delta u_t\|^2\leqslant\frac{4\phi^2(\|\nabla u\|^2)}{\beta}\|\Delta u\|^2+\frac{2^{2p}}{\beta}\|u\|^2+C\frac{2^{2p}}{\beta}\|\nabla u\|^{4p-2}+\frac{4}{\beta}\|f(x,t)\|^2$$
$$\leqslant\frac{4M^2}{\beta}\|\Delta u\|^2+\frac{2^{2p}}{\beta}\|u\|^2+C\frac{2^{2p}}{\beta}\|\nabla u\|^{4p-2}+\frac{4}{\beta}\|f(x,t)\|^2:C_2,\tag{21}$$

其中，根据评论 1 设 M 为函数 $\phi(s)$的上界，令 $K_1=4M^2/\beta$，$K_2=K_1+1$，(20）$\times K_2+$(21)，得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[K_2(\alpha\|\nabla u\|^2+2(u_t,-\Delta u)+\beta\|\Delta u\|^2)+\|\nabla u_t\|^2]+\|\Delta u\|^2+2\alpha\|\nabla u_t\|^2+\beta\|\Delta u_t\|^2\leqslant K_2C_1+C_2.\tag{22}$$

（1）式中的方程分别与 u_t 作 H 内积，得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_2+\alpha\|u_t\|^2+2\beta\|\nabla u_t\|^2\leqslant\frac{\|f(x,\ t)\|^2}{2\alpha},\tag{23}$$

其中
$$H_2=\|u_t\|^2+\int_0^{\|\nabla u\|^2}\phi(s)\,\mathrm{d}s+\frac{1}{p}\int_\Omega(1+|u|^2)^p\mathrm{d}x.$$

令 $K_3=2K_2/\beta+1$，(23）$\times K_3+$(22)，得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_3+\|\Delta u\|^2+2\alpha K_3\|\nabla u_t\|^2+\beta K_3\|\Delta u_t\|^2\leqslant K_2C_3+C_4+K_3\frac{\|f(x,t)\|^2}{2\alpha},\tag{24}$$

其中 $$\frac{K_2\beta\|\Delta u\|^2}{2}+\|\nabla u_t\|^2\leqslant H_3=K_2(\alpha\|\nabla u\|^2+2(u_t,-\Delta u)+\beta\|\Delta u\|^2)+\|\nabla u_t\|^2+K_3H_2$$

$$\leqslant\frac{1}{\sigma}(\|\Delta u\|^2+\alpha\|\nabla u_t\|^2)+K_3H_2,\tag{25}$$

由于 σ 是一个很小的正常数. 可以得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_3+\sigma H_3+\beta\|\Delta u_t\|^2\leqslant C(1+\|f(x,t)\|^2).\tag{26}$$

因此，根据 D 不等式得到：

$$H_3(t)\leqslant H_3(\tau)\mathrm{e}^{-\sigma(t-\tau)}+C(1+\mathrm{e}^{-\sigma t}\int_\tau^t\mathrm{e}^{\sigma s}\|f(x,s\|^2\mathrm{d}s),\tag{27}$$

$$H_3(\tau)\leqslant C(\|\nabla u_1\|^2+\|\Delta u_0\|^2)+C,$$

所以 $$\|\nabla u_t(t)\|^2+\|\Delta u(t)\|^2\leqslant C\Big[\mathrm{e}^{-\sigma(t-\tau)}(\|\nabla u_1\|^2+\|\Delta u_0\|^2+1)+1+\mathrm{e}^{-\sigma t}\int_\tau^t\mathrm{e}^{\sigma s}\|f(x,s)\|^2\mathrm{d}s\Big]$$

$$\leqslant C\Big[\mathrm{e}^{-\sigma(t-\tau)}(\|\nabla u_1\|^2+\|\Delta u_0\|^2+1)+1+\mathrm{e}^{-\sigma t}\int_{-\infty}^t\mathrm{e}^{\sigma s}\|f(x,s)\|^2\mathrm{d}s\Big].\tag{28}$$

定义 $\hat{D}=\{D(t):t\in R\}\subset P(X)$ 使得 $D(t)\subset\bar{B}(r(t))$，其中 $\bar{B}(r(t))$ 是半径为 $r(t)$ 在 X 的闭球，令

$$r_0=C\ (1+\mathrm{e}^{-\sigma t}\int_{-\infty}^t\mathrm{e}^{\sigma s}\|f(x,s)\|^2\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}},$$

则对任意 $\hat{D}$ 及 t，根据（28）存在 $\tau_0(\hat{D},t)\leqslant t$，使得：

$$\|\nabla u_t(t)\|^2+\|\Delta u(t)\|^2\leqslant r_0(t),\ \text{对所有}\ \tau\leqslant\tau_0,\tag{29}$$

则 $\hat{B}=\{\bar{B}_0(r_0(t))\}$ 为在 X 上的一族有界拉回 D－吸收集. 证毕.

3 拉回 D－吸引子的存在性

设 λ_1，$\lambda_2\cdots$ 为 $-\Delta$ 在 H_0^1 的特征值，ω_1，ω_2，ω_3，$\cdots$ 为相应的特征向量. 考虑到不失一般性，假设 $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$，及当 $m\to\infty$ 时，$\lambda_m\to+\infty$. $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\cdots\}$ 为在空间 $H^2\cap H_0^1$ 的正交基，令 $H_m=span\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m\}$，$P_m$：$H^2\cap H_0^1\to H_m$ 是一标准正交投影，I 为恒等算子，则对于任意的 $u\in H^2\cap H_0^1$，u 可唯一分解为：$u=u_1+u_2$，其中 $u_1=P_mu\in H_m$，$u_2=(I-P_m)u$.

定理 4 在假设 $(H_1)\sim(H_3)$ 条件下，由问题 $(1)\sim(3)$ 得到的过程 $\{U(t,\tau)\}$ 在 X 中存在拉回 D－吸引子 $\hat{A}=\{A(t):t\in R\}$.

证明 由定理 3，$\{U(t,\tau)\}$ 在 X 具有一族拉回 D－吸收集. 根据引理 1，只需证明 $\{U(t,\tau)\}$ 满足条件（PDC）.

令 $u(t)=U(t,\tau)u_\tau=u_1(t)+u_2(t)$，其中 $u_\tau\in D(\tau)$，$u_1=P_mu$ 和 $u_2=(I-P_m)u$.

（1）式中的方程分别与 $-\Delta u_2$，$-\Delta u_{2t}$ 作 H 内积，得到：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\alpha\|\nabla u_2\|^2+2(u_{2t},-\Delta u_2)+\beta\|\Delta u_2\|^2]+(I-P_m)\phi(\|\nabla u\|^2)\|\Delta u_2\|^2$$

$$=((I-P_m)(1+|u|^2)^{p-1}u,\Delta u_2)+((I-P_m)f(x,t),-\Delta u_2),\tag{30}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u_{2t}\|^2+\alpha\|\nabla u_{2t}\|^2+\beta\|\Delta u_{2t}\|^2=(I-P_m)\phi\ (\|\nabla u\|^2)\ (\Delta u_2,\ \Delta u_{2t})$$

$$+((I-P_m)\ (1+|u|^2)^{p-1}u,\ \Delta u_{2t})+((I-P_m)f(x,t),\ -\Delta u_{2t}),\tag{31}$$

其中
$$|((I-P_m)(1+|u|^2)^{p-1}u,\Delta u_2)|\leqslant\begin{cases}|(2^{p-1}u_2,\Delta u_2)|, & |u|<1,\\ |((I-P_m)2^{p-1}|u|^{2p-2}u,\Delta u_2)|, & |u|\geqslant 1.\end{cases}\tag{32}$$

由于
$$|(2^{p-1}u_2,\Delta u)|\leqslant\frac{1}{2}\|\Delta u_2\|^2+2^{2p-1}\|u_2\|^2,\tag{33}$$

$$\begin{aligned}|(2^{p-1}(I-P_m)|u|^{2p-2}u,\Delta u_2)|&\leqslant 2^{p-1}\|u\|_{4p-2}^{2p-1}\|\Delta u_2\|\leqslant C(\Omega,4p-2)\times 2^{p-1}\|\nabla u\|^{2p-1}\|\Delta u_2\|\\&\leqslant\frac{1}{8}\|\Delta u_2\|^2+2^{2p-1}C\cdot\|\nabla u\|^{4p-2},\end{aligned}\tag{34}$$

则
$$|((I-P_m)(1+|u|^2)^{p-1}u,\Delta u_2)|\leqslant\frac{1}{4}\|\Delta u_2\|^2+2^{2p-1}\|u_2\|^2+2^{2p-1}C\cdot\|\nabla u\|^{4p-2},\tag{35}$$

$$|((I-P_m)f,-\Delta u_2)|\leqslant\frac{1}{4}\|\Delta u_2\|^2+\|f(x,t)\|^2.\tag{36}$$

同时得到：

$$|((I-P_m)(1+|u|^2)^{p-1}u,\Delta u_{2t})|\leqslant\frac{\beta}{4}\|\Delta u_{2t}\|^2+\frac{2^{2p-1}}{\beta}\|u_2\|^2+\frac{2^{2p-1}}{\beta}C\cdot\|\nabla u\|^{4p-2},\tag{37}$$

$$(I-P_m)\phi(\|\nabla u\|^2)|(\Delta u_2,\Delta u_{2t})|\leqslant\frac{\beta}{8}\|\Delta u_{2t}\|^2+2\frac{M^2}{\beta}\|\Delta u_2\|^2,\tag{38}$$

$$|((I-P_m)f(x,t),-\Delta u_{2t})|\leqslant\frac{\beta}{8}\|\Delta u_{2t}\|^2+\frac{2}{\beta}\|f(x,t)\|^2.\tag{39}$$

将（35）和（36）代入（30），得到：

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\alpha\|\nabla u_2\|^2+2(u_{2t},-\Delta u_2)+\beta\|\Delta u_2\|^2]+\|\Delta u_2\|^2\\&\leqslant 2^{2p}\|u_2\|^2+2^{2p}\cdot C\|\nabla u\|^{4p-2}+2\|f(x,t)\|^2:C_3.\end{aligned}\tag{40}$$

将(37)~(39)代入（31），得到：

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u_{2t}\|^2+2\alpha\|\nabla u_{2t}\|^2+\beta\|\Delta u_{2t}\|^2\leqslant\frac{4M^2}{\beta}\|\Delta u_2\|^2+\frac{2^{2p}}{\beta}\|u_2\|^2+C\frac{2^{2p}}{\beta}\|\nabla u\|^{4p-2}\\&+\frac{4}{\beta}\|f(x,t)\|^2:C_4.\end{aligned}\tag{41}$$

令 $K_1=4M2/\beta$，$K_2=K_1+1$，（40）$\times K_2+$（41），得到：

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[K_2(\alpha\|\nabla u_2\|^2+2(u_{2t},-\Delta u_2)+\beta\|\Delta u_2\|^2)+\|\nabla u_{2t}\|^2]+\|\Delta u_2\|^2+2\alpha\|\nabla u_{2t}\|^2\\&+\beta\|\Delta u_{2t}\|^2\leqslant K_2C_3+C_4.\end{aligned}\tag{42}$$

（1）式中的方程分别与 u_{2t} 作 H 内积得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{2t}\|^2+\alpha\|u_t\|^2+2\beta\|\nabla u_t\|^2\leqslant\frac{2^{2p}}{\alpha}\|u_2\|^2+\frac{2^{2p}}{\alpha}C\|\nabla u\|^{4p-2}+4\frac{M^2}{\alpha}\|\Delta u_2\|^2+4\frac{\|f(x,t)\|^2}{\alpha}:C_5.\tag{43}$$

令 $K_3=2K_2/\beta+1$,(43)$\times K_3+$(42),得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_4+\|\Delta u_2\|^2+2\alpha K_3\|\nabla u_{2t}\|^2+\beta K_3\|\Delta u_{2t}\|^2\leqslant K_2C_3+C_4+K_3C_5,\tag{44}$$

其中
$$\begin{aligned}\frac{K_2\beta\|\Delta u_2\|^2}{2}+\|\nabla u_{2t}\|^2&\leqslant H_4\\&=K_2(\alpha\|\nabla u_2\|^2+2(u_{2t},-\Delta u_2)+\beta\|\Delta u_2\|^2)+\|\nabla u_{2t}\|^2+K_3\|u_{2t}\|^2\\&\leqslant\frac{1}{\sigma}(\|\Delta u_2\|^2+\alpha\|\nabla u_{2t}\|^2)+K_3\|u_{2t}\|^2,\end{aligned}\tag{45}$$

其中，σ 是一个很小的正常数. 结合（29）可以得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_4+\sigma H_4+\beta\|\Delta u_{2t}\|^2\leqslant C(1+(r_0(t))^{4p-2}+\|f(x,\ t)\|^2). \tag{46}$$

因此，根据 Gronwall 不等式得到：

$$H_4(t)\leqslant H_4(\tau)\mathrm{e}^{-\delta(t-\tau)}+\frac{C}{\sigma}+C\mathrm{e}^{-\sigma t}\int_\tau^t \mathrm{e}^{\sigma s}(r_0(s))^{4p-2}\mathrm{d}s+C\mathrm{e}^{-\sigma t}\int_\tau^t \mathrm{e}^{\sigma s}\|f(x,s)\|^2\mathrm{d}s, \tag{47}$$

所以

$$\begin{aligned}\|\nabla u_{2t}(t)\|^2+\|\Delta u_2(t)\|^2\leqslant & H_4(\tau)\mathrm{e}^{-\delta(t-\tau)}+\frac{C}{\sigma}+C\mathrm{e}^{-\sigma t}\int_\tau^t \mathrm{e}^{\sigma s}(r_0(s))^{4p-2}\mathrm{d}s\\ &+C\mathrm{e}^{-\sigma t}\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{\sigma s}\|f(x,s)\|^2\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{48}$$

其中

$$\begin{aligned}\int_\tau^t \mathrm{e}^{\sigma s}(r_0(s))^{4p-2}\mathrm{d}s &= C\int_\tau^t \mathrm{e}^{\sigma s}(1+\mathrm{e}^{-\sigma s}\int_{-\infty}^s \mathrm{e}^{\sigma r}\|f(x,r\|^2\mathrm{d}r)^{2p-1}\mathrm{d}s\\ &\leqslant C\int_\tau^t \mathrm{e}^{\sigma s}(1+\mathrm{e}^{-\sigma s}\int_{-\infty}^s \mathrm{e}^{\sigma r}\|f(x,r\|^2\mathrm{d}r)\mathrm{d}s\\ &\leqslant C\int_\tau^t \mathrm{e}^{\sigma s}\mathrm{d}s+C\int_{-\infty}^t\int_{-\infty}^s \mathrm{e}^{\sigma r}\|f(x,r)\|^2\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\ &\leqslant \frac{C\mathrm{e}^{\sigma t}}{\sigma}+C\int_{-\infty}^t\int_{-\infty}^s \mathrm{e}^{\sigma r}\|f(x,r)\|^2\mathrm{d}r\mathrm{d}s<+\infty.\end{aligned} \tag{49}$$

由（H_3），（48）和（49）式，$\|\nabla u_{2t}(t)\|^2+\|\Delta u_2(t)\|^2\leqslant\eta$，即$\{U(t,\ \tau)\}$在 X 内满足条件（PDC）. 证毕.

［参考文献］

［1］LV P H，LU J X，LIN G G. Global attractor for a class of nonlinear generalized Kirchhoff models［J］. Journal of Advances in Mathematics，2016，12（8）：6452－6462.

［2］YANG Z，JIN B. Global attractor for a class of Kirchhoff models［J］. Journal of Mathematical Physics，2009，50：1－29.

［3］LV P H，LOU R J，LIN G G. Global attractor for a class of nonlinear generalized Kirchhoff-Boussinesq model［J］. International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application，2016，5：82－92.

［4］杨志坚，程建玲. Kirchhoff 型方程解的渐近行为［J］. 数学物理学报，2011，31（4）：1008－1021.

［5］ANH C T，TANG Q B. Pullback attractors for a class of non-autonomous nonnclassical diffusion equations［J］. Nonlinear Analysis，2010，73：399－412.

［6］ZELIK S. Asymptotic regularity of solutions of a nonautonomous damped wave equation wtih a criticcal growth exponent［J］. Communications on Pure and Applied Analysis，2004，3（4）：921－934.

［7］WANG Y H. Pullback attractors for nonautonomous wave equations with critical exponent［J］. Nonlinear Analysis，2008，68：365－376.

［8］雍鸿雄，马巧珍，常亚亚. 非自治吊桥方程的拉回吸引子［J］. 四川大学学报（自然科学版），2015，52（2）：255－261.

［9］王旦霞，张建文. 具有强阻尼的非自治非线性热弹耦合杆方程组的拉回 D－吸引子［J］. 理论数学，2012（2）：82－87.

［10］徐茜，李晓军. 带非线性阻尼非自治波方程拉回吸引子的存在性［J］. 黑龙江大学自然科学学报，2014，31（3）：306－314.

［11］马腾洋，姜金平，雷思思. 非自治 Cahn-Hilliard 方程的拉回 D－吸引子存在性［J］. 延安大学学报（自然科学版），2015，34（4）：1－3.

［12］王斌莅，马巧珍. Brinkman-Forchheimer 方程双空间中的拉回吸引子［J］. 兰州交通大学学报，2010，29（4）：153－158.

［13］CHEN J W，DONG B Q，CHEN Z M. Pullback attractors of non-autonomous micropolar fluid flows［J］. Mathematical Analysis and Application，2007，336：1384－1394.

［14］LIN G G. Nonlinear evolution equation［M］. Kunming：Yunnan University Press，2011.