昆明学院学报　2022，44（3）：60～64，92　ISSN 1674－5639　CN 53－1211/G4
Journal of Kunming University

双极模糊分子图的复杂度函数

兰美辉[1]，高　炜[2]
（1. 曲靖师范学院 信息工程学院，云南 曲靖 655011；2. 云南师范大学 信息学院，云南 昆明 650500）

摘要：连通性相关指数是理论化学分子结构拓扑指数的重要研究内容之一．当分子结构存在不确定特征时，分子图可以用模糊图来刻画．因此，给出了双极模糊图框架下与连通性相关的复杂度函数的概念，同时利用模糊集理论得到其有关性质．此外，探讨了复杂度函数在特定分子结构图上的表示．

关键词：理论化学；分子图；双极模糊图；复杂度函数
中图分类号：O159　**文献标志码**：A　**文章编号**：1674－5639（2022）03－0060－05
DOI：10.14091/j.cnki.kmxyxb.2022.03.012

Complexity Function of Bipolar Fuzzy Molecular Graphs

LAN Meihui[1]，GAO Wei[2]
（1. School of Information Engineering，Qujing Normal University，Qujing，Yunnan，China　655011；
2. School of Information Science and Technology，Yunnan Normal University，Kunming，Yunnan，China　650500）

Abstract：Connectivity correlation index is one of the important research contents of topological index of theoretical chemical molecular structure. When there are uncertain features in the molecular structure，the molecular graph is characterized by a fuzzy graph，so the concept of the connectivity-related complexity function in bipolar fuzzy graph setting is given，and its properties are obtained by means of fuzzy set theory. Furthermore，the expression of complexity functions in specific molecular structure graphs are given.

Key words：theoretical chemistry；molecular graph；bipolar fuzzy graph；complexity function

化学图论作为数学与化学的交叉学科，由于其广泛应用而受到国内外学者的重视．化学图论的本质是通过对分子结构建模，然后通过计算特定的拓扑指数来衡量对应化合物的特性．具体地说，原子用顶点表示，原子之间的化学键用顶点之间的边表示，进而整个分子结构用图来刻画，这样的图称为分子图（molecular graph）．针对某种物理、化学、生物或者材料特性，定义拓扑指数，然后通过分子图拓扑指数的计算来预测分子图对应化合物的性质[1－10]．

在实际应用中，我们发现该模型存在诸多缺陷，其原因主要是分子图是一个理想化模型，所有顶点被一视同仁，没有区别不同原子之间在某个化学属性上的差异，顶点之间的边也没有反映出4种基本化学键之间的差异．此外，若分子结构中存在某种不确定性，则传统的分子图无法表述这种不确定性．由于模糊数学是刻画不确定性的良好工具，可通过定义顶点和边的隶属度函数，进而将分子图转化为模糊分子图．再将原来分子图中定义的化学拓扑指数推广到模糊图框架，进而可以通过在模糊图上计算新拓扑指数来预判带有不确定性的分子结构的特性．近年来，关于模糊图的相关研究可参考文献［11－20］．

本文在双极模糊图框架下考察与连通指数相关的复杂度函数，给出其具体的定义，并从理论的角度得到相关性质，同时讨论在模糊分子图是特定结构下，复杂度函数的具体表示．剩余内容的组织结构如下：

收稿日期：2022－03－22
基金项目：国家自然科学基金地区基金（12161094）．
作者简介：兰美辉（1982—），女，云南宜良人，讲师，硕士，主要从事数据表示和网络计算研究；高炜（1981—），男，浙江绍兴人，教授，博士，主要从事图论、理论化学、统计学习理论研究．

首先，介绍双极模糊图及相关的概念、符号和标记；其次，给出双极模糊图框架下复杂度函数的具体定义，并得到若干理论性质；最后，在双极模糊分子图结构是特殊形状的条件下，给出复杂度函数的刻画.

1　预备知识

设 V 是双极模糊图的顶点集，定义 V 上的双极模糊集为 (ξ_A^+,ξ_A^-)，其中 $\xi_A^+:V\to[0,1]$ 是顶点集 V 的正极隶属度函数，$\xi_A^-:V\to[-1,0]$ 是顶点集 V 的负极隶属度函数. (ξ_B^+,ξ_B^-) 是定义在 $V\times V$ 上的双极模糊集，其中 $\xi_B^+:V\times V\to[0,1]$ 是 V^2 上的正极隶属度函数，$\xi_B^-:V\times V\to[-1,0]$ 是 V^2 上的负极隶属度函数. 若顶点对 v 和 v' 之间没有边，则规定 $\xi_B^+(v,v')=\xi_B^-(v,v')=0$. 顶点隶属度函数 (ξ_A^+,ξ_A^-) 和边隶属度函数 (ξ_B^+,ξ_B^-) 之间的关系为：对任意顶点对 $v,v'\in V$，有

$$\xi_B^+(v,v')\leqslant(\xi_A^+(v)\wedge\xi_A^+(v')),$$

$$\xi_B^-(v,v')\geqslant(\xi_A^-(v)\vee\xi_A^-(v')),$$

其中 $\wedge$ 和 $\vee$ 分别为最小值和最大值算子. 记 $G=(V,\xi_A^+,\xi_A^-,\xi_B^+,\xi_B^-)$ 为双极模糊图. 如果对任意顶点对 $v,v'\in V$，上述两式中的等号均成立，则称 G 为完全双极模糊图.

称双极模糊图 $G'=(V',\zeta_A^+,\zeta_A^-,\zeta_B^+,\zeta_B^-)$ 是 $G=(V,\xi_A^+,\xi_A^-,\xi_B^+,\xi_B^-)$ 的部分双极模糊子图，若 $\zeta_A^+(v)\leqslant\xi_A^+(v),\zeta_A^-(v)\geqslant\xi_A^-(v)$ 对所有 $v\in V'$ 成立，且 $\zeta_B^+(v,v')\leqslant\xi_B^+(v,v'),\zeta_B^-(v,v')\geqslant\xi_B^-(v,v')$ 对顶点对 $v,v'\in V'$ 成立. 在此情况下，G' 称为 G 的双极模糊子图，若 $\zeta_A^+(v)=\xi_A^+(v),\zeta_A^-(v)=\xi_A^-(v)$ 对所有 $v\in V'$ 成立，且 $\zeta^+{}_B(v,v')=\xi_B^+(v,v'),\zeta_B^-(v,v')=\xi_B^-(v,v')$ 对顶点对 $v,v'\in V'$ 成立.

称双极模糊图 $G'=(V',\zeta_A^+,\zeta_A^-,\zeta_B^+,\zeta_B^-)$ 是 $G=(V,\xi_A^+,\xi_A^-,\xi_B^+,\xi_B^-)$ 的 (t^+,t^-) - 割双极模糊子图（记为 $G^{(t^+,t^-)}$），若 G' 是 G 的部分双极模糊子图，且

$$V'=\{x\mid\zeta_A^+(x)\geqslant t^+,\zeta_A^-(x)\leqslant t^-\},$$

$$E'=\{xy\mid\zeta_B^+(x,y)\geqslant t^+,\zeta_B^-(x,y)\leqslant t^-\},$$

其中 $0\leqslant t^+\leqslant1$，$-1\leqslant t^-\leqslant0$，$E'$ 是 G' 的边集合.

设 $G=(V,\xi_A^+,\xi_A^-,\xi_B^+,\xi_B^-)$ 和 $G'=(V',\zeta_A^+,\zeta_A^-,\zeta_B^+,\zeta_B^-)$ 是两个双极模糊图. 若存在双射 $f:V\to V'$ 对所有 $v\in V$ 满足 $\xi_A^+(v)=\zeta_A^+(f(v))$ 和 $\xi_A^-(v)=\zeta_A^-(f(v))$，且对所有 $(v,v')\in V^2$ 满足 $\xi_B^+(v,v')=\zeta_B^+(f(v),f(v'))$ 和 $\xi_B^-(v,v')=\zeta_B^-(f(v),f(v'))$，则称 G 和 G' 同构，记为 $G\cong G'$，其中 $f:V\to V'$ 称为同构映射.

连通双极模糊图 $G=(V,\xi_A^+,\xi_A^-,\xi_B^+,\xi_B^-)$ 称为双极模糊树，若它存在生成模糊子图 $F=(V,\zeta_A^+,\zeta_A^-,\zeta_B^+,\zeta_B^-)$ 是树，使得所有不在 F 中的顶点对 $(v,v')\in V^2$，在 F 中存在 v 和 v' 之间的路径，它的正强度大于 $\zeta_B^+(v,v')$，负强度小于 $\zeta_B^-(v,v')$. 在此情况下，F 称为双极模糊图 G 的唯一最大生成树.

对于双极模糊图 $G=(V,\xi_A^+,\xi_A^-,\xi_B^+,\xi_B^-)$，它的大小（size）定义为 $(S^+(G),S^-(G))$，其中 $S^+(G)=\sum_{i\neq j}\xi_B^+(v_i,v_j)$，$S^-(G)=\sum_{i\neq j}\xi_B^-(v_i,v_j)$. 任意顶点 v 的度定义为 $(d^+(v),d^-(v))$，其中 $d^+(v)=\sum_{u\neq v}\xi_B^+(v,u)=\sum_{u\in N(v)}\xi_B^+(v,u)$，$d^-(v)=\sum_{u\neq v}\xi_B^-(v,u)=\sum_{u\in N(v)}\xi_B^-(v,u)$，$N(v)$ 表示顶点 v 的邻域集. $d^+(v)+\xi_A^+(v)$ 称为顶点 v 的正全度（Positive total degree），$d^-(v)+\xi_A^-(v)$ 称为顶点 v 的负全度（Negative total degree）.

若双极模糊图 G 中每个顶点的正度 $d^+(v)$ 均相同，则称 G 为正则正模糊图（Regular positive fuzzy graph）；若每个顶点的正全度 $d^+(v)+\xi_A^+(v)$ 均相同，则称 G 为全正则正模糊图（Totally regular positive fuzzy graph）. 若双极模糊图 G 中每个顶点的负度 $d^-(v)$ 均相同，则称 G 为正则负模糊图（Regular negative fuzzy graph）；若每个顶点的负全度 $d^-(v)+\xi_A^-(v)$ 均相同，则称 G 为全正则负模糊图（Totally regular negative fuzzy graph）. 若双极模糊图 G 中每个顶点的度 $(d^+(v),d^-(v))$ 均相同，则称 G 为正则双极模糊图（Regular bipolar fuzzy graph）；若每个顶点的全度 $(d^+(v)+\xi_A^+(v),d^-(v)+\xi_A^-(v))$ 均相同，则称 G 为全正则双极模糊图（Totally regular bipolar fuzzy graph）.

双极模糊图 G 称为完美正正则（Perfectly positive regular）若 G 同时为正则正模糊图和全正则正模糊图；

称为完美负正则(Perfectly negative regular)若 G 同时为正则负模糊图和全正则负模糊图；称为完美双极正则(Perfectly bipolar regular)若 G 同时为正则双极模糊图和全正则双极模糊图.

通过概念可知以下事实：

- G 为正则正模糊图$\Leftrightarrow d^+$为常数函数；
- G 为正则负模糊图$\Leftrightarrow d^-$为常数函数；
- G 为正则双极模糊图$\Leftrightarrow d^-$和 d^+ 均为常数函数；
- G 为完美正正则模糊图$\Leftrightarrow d^+$和 ξ_A^+ 均为常数函数；
- G 为完美负正则模糊图$\Leftrightarrow d^-$和 ξ_A^- 均为常数函数；
- G 为完美双极正则模糊图$\Leftrightarrow d^+$，ξ_A^+，d^-和 ξ_A^- 均为常数函数.

设 $P=v_1v_2\cdots v_n$ 是 $x=v_1$ 和 $y=v_n$ 之间的一条路径(无方向)，则 P 的正强度定义为路径中边正隶属度函数 ξ_B^+ 的最小值，而这条拥有最小边正隶属度函数值的边称为该路径 P 的正极最弱边，它决定了路径的正强度；P 的负强度定义为路径中边负隶属度函数 ξ_B^- 的最大值，而这条拥有最大边负隶属度函数值的边称为该路径 P 的负极最强边，它决定了路径的负强度.

2 复杂度函数及特征

本节给出主要概念以及理论结果.

定义 1 设 $G=(V,\xi_A^+,\xi_A^-,\xi_B^+,\xi_B^-)$为双极模糊图，$n=|V|$为图 G 的顶点个数，$m=|E|$为图 G 的边数，则双极模糊图 G 的复杂度函数记为$(CF^+(G),CF^-(G))$，其中

$$CF^+(G)=\frac{mn}{m+n}\sum_{v_i,v_j\in V,i>j}\xi_A^+(v_i)\xi_A^+(v_j)SP_{ij}^+,$$

$$CF^-(G)=\frac{mn}{m+n}\sum_{v_i,v_j\in V,i>j}\xi_A^-(v_i)\xi_A^-(v_j)SP_{ij}^-,$$

分别表示正复杂度函数和负复杂度函数. 这里，SP_{ij}^+表示 v_i 和 v_j 之间所有路径的正强度之和，SP_{ij}^-表示 v_i 和 v_j 之间所有路径的负强度之和，$i>j$ 表示每一对顶点在求和的累加中只出现一次.

由定义 1 可得到下面的性质.

定理 1 设双极模糊图 $G'=(V',\zeta_A^+,\zeta_A^-,\zeta_B^+,\zeta_B^-)$是 $G=(V,\xi_A^+,\xi_A^-,\xi_B^+,\xi_B^-)$的部分双极模糊子图，则 $CF^+(G)\geqslant CF^+(G')$，$CF^-(G)\leqslant CF^-(G')$.

定理 2 设双极模糊图 $G'=(V',\zeta_A^+,\zeta_A^-,\zeta_B^+,\zeta_B^-)$是 $G=(V,\xi_A^+,\xi_A^-,\xi_B^+,\xi_B^-)$的双极模糊子图，则 $CF^+(G)>CF^+(G')$，$CF^-(G)<CF^-(G')$.

定理 3 若一个顶点或者一条边从双极模糊图 G 中删除，则它的正复杂度函数会严格减少，负复杂度函数会严格增加.

定理 4 设 $G=(V,\xi_A^+,\xi_A^-,\xi_B^+,\xi_B^-)$为双极模糊图，对任意顶点 $v\in V$ 有 $\xi_A^+(v)=1$ 和 $\xi_A^-(v)=-1$，且对任意边 $vv'\in E$ 有 $\xi_B^+(v,v')=k^+$和 $\xi_B^-(v,v')=k^-$，其中 $k^+\in[0,1]$，$k^-\in[-1,0]$. 若任意一对顶点之间均有 p 条路径，则

$$CF^+(G)=\frac{n^2(n-1)m}{2(m+n)}pk^+,\ CF^-(G)=\frac{n^2(n-1)m}{2(m+n)}pk^-.$$

证明 注意到对任意一对顶点 v_i 和 v_j，有 $SP_{ij}^+=pk^+$和 $SP_{ij}^-=pk^-$. 由于 n 个顶点共有$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$种组合，从而有

$$CF^+(G)=\frac{mn}{m+n}\sum_{v_i,v_j\in V,i>j}\xi_A^+(v_i)\xi_A^+(v_j)SP_{ij}^+=\frac{mn}{m+n}\times\frac{n(n-1)}{2}pk^+=\frac{n^2(n-1)m}{2(m+n)}pk^+,$$

$$CF^-(G)=\frac{mn}{m+n}\sum_{v_i,v_j\in V,i>j}\xi_A^-(v_i)\xi_A^-(v_j)SP_{ij}^-=\frac{mn}{m+n}\times\frac{n(n-1)}{2}pk^-=\frac{n^2(n-1)m}{2(m+n)}pk^-.$$

定理 5　设 $G=(V,\xi_A^+,\xi_A^-,\xi_B^+,\xi_B^-)$ 和 $G'=(V',\zeta_A^+,\zeta_A^-,\zeta_B^+,\zeta_B^-)$ 是两个相互同构的双极模糊图. 则有 $(CF^+(G),CF^-(G))=(CF^+(G'),CF^-(G'))$.

证明　由同构条件可知，存在同构双射 $f:V\to V'$ 对所有 $v\in V$ 满足 $\xi_A^+(v)=\zeta_A^+(f(v))$ 和 $\xi_A^-(v)=\zeta_A^-(f(v))$，且对所有 $(v,v')\in V^2$ 满足 $\xi_B^+(v,v')=\zeta_B^+(f(v),f(v'))$ 和 $\xi_B^-(v,v')=\zeta_B^-(f(v),f(v'))$. 进而 G 和 G' 有相同的顶点数和边数，即 $n=|V|=|V'|$，$m=|E|=|E'|$. 同时，由同构性可知，在 G 中路径 P 的正负强度分别与 G' 中对应路径的正负强度相等，进而 SP_{ij}^+ 和 SP_{ij}^- 的值分别与 $f(v_i)$ 和 $f(v_j)$ 在 G' 中路径的正强度之和和负强度之和相等. 因此，由正负复杂度函数的定义可知：$CF^+(G)=CF^+(G')$ 和 $CF^-(G)=CF^-(G')$.

下面的定理 6 说明在顶点正隶属度函数下界和负隶属度函数上界确定的情况下，正复杂度函数的下界和负复杂度函数的上界可以被刻画.

定理 6　设 $G=(V,\xi_A^+,\xi_A^-,\xi_B^+,\xi_B^-)$ 为连通双极模糊图，$S^+(G)$ 和 $S^-(G)$ 分别简记为 S^+ 和 S^-，$l^+=\min\{\xi_A^+(v):v\in V\}$，$l^-=\max\{\xi_A^-(v):v\in V\}$. 则有

$$CF^+(G)\geqslant\frac{n}{n+1}(l^+)^2S^+,\ CF^-(G)\leqslant\frac{n}{n+1}(l^-)^2S^-.$$

证明　下面只给出 $CF^-(G)\leqslant\frac{n}{n+1}(l^-)^2S^-$ 的证明，正极部分可以用相同的方法得到.

由于 G 是连通的，有 $2m\geqslant n$，即 $m\geqslant\frac{n}{2}$. 由于 G 最多有 $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ 条边，进而 $m\leqslant\frac{n(n-1)}{2}$. 从而由

$$\frac{mn}{m+n}\geqslant\frac{n\frac{n}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}+n}\text{可知，}\frac{mn}{m+n}\geqslant\frac{n}{n+1}.$$

另一方面，显然有 $SP_{ij}^-\leqslant\xi_B^-(v_i,v_j)$. 进而

$$\sum_{v_i,v_j\in V,i>j}\xi_A^-(v_i)\xi_A^-(v_j)SP_{ij}^-\leqslant\sum_{v_iv_j\in E}(l^-)^2\xi_B^-(v_i,v_j)=(l^-)^2S^-.$$

综上所述，可知 $CF^-(G)\leqslant\frac{n}{n+1}(l^-)^2S^-$ 成立.

定理 7 是关于双极模糊图的 (t^+,t^-)－割双极模糊子图 $G^{(t^+,t^-)}$ 的复杂度函数的刻画.

定理 7　设 $G=(V,\xi_A^+,\xi_A^-,\xi_B^+,\xi_B^-)$ 为双极模糊图. 若 $0\leqslant t_1^+\leqslant t_2^+\leqslant\cdots\leqslant t_r^+\leqslant1$，$0\geqslant t_1^-\geqslant t_2^-\geqslant\cdots\geqslant t_r^-\geqslant-1$，则 $CF^+(G^{(t_1^+,t_1^-)})\geqslant CF^+(G^{(t_2^+,t_2^-)})\geqslant\cdots\geqslant CF^+(G^{(t_r^+,t_r^-)})$，$CF^-(G^{(t_1^+,t_1^-)})\leqslant CF^-(G^{(t_2^+,t_2^-)})\leqslant\cdots\leqslant CF^-(G^{(t_r^+,t_r^-)})$.

定理 8　设 $G=(V,\xi_A^+,\xi_A^-,\xi_B^+,\xi_B^-)$ 为完美双极正则模糊图. 对任意 $v\in V$ 满足 $d^+(v)=k^+$，$d^-(v)=k^-$，$\xi_A^+(v)=l^+$ 及 $\xi_A^-(v)=l^-$，其中 $l^+,k^+\in[0,1]$，$l^-,k^-\in[-1,0]$. 则

$$CF^+(G)\geqslant\frac{n^2}{2(n+1)}k^+(l^+)^2,\ CF^-(G)\leqslant\frac{n^2}{2(n+1)}k^-(l^-)^2.$$

下面对双极模糊分子图是特定图结构时，复杂度函数的刻画.

定理 9　设 $G=(V,\xi_A^+,\xi_A^-,\xi_B^+,\xi_B^-)$ 为双极模糊圈，$\xi_A^+,\xi_A^-,\xi_B^+,\xi_B^-$ 均为常数函数. 若 G 有 n 个顶点，对任意 $v\in V$ 有 $\xi_A^+(v)=l^+$ 及 $\xi_A^-(v)=l^-$，且对任意边 $vv'\in E$ 有 $\xi_B^+(v,v')=k^+$ 和 $\xi_B^-(v,v')=k^-$，其中 $l^+,k^+\in[0,1]$，$l^-,k^-\in[-1,0]$. 则

$$CF^+(G)=\frac{n^2(n-1)}{2}k^+(l^+)^2,\ CF^-(G)=\frac{n^2(n-1)}{2}k^-(l^-)^2.$$

证明　由于 G 是双极模糊圈，因此它的边数等于顶点数等于 n，且任意两个顶点 v_i 和 v_j 之间有且只有两条路，从而对任意 $v_i,v_j\in V$ 有 $SP_{ij}^+=2k^+$，$SP_{ij}^-=2k^-$. 注意到共有 $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ 个对顶点，因此

$$CF^+(G)=\frac{mn}{m+n}\sum_{v_i,v_j\in V,i>j}\xi_A^+(v_i)\xi_A^+(v_j)SP_{ij}^+=\frac{n\times n}{n+n}\frac{n(n-1)}{2}(l^+)^22k^+=\frac{n^2(n-1)}{2}k^+(l^+)^2,$$

$$CF^-(G) = \frac{mn}{m+n}\sum_{v_i,v_j \in V, i>j} \xi_A^-(v_i)\xi_A^-(v_j)SP_{ij}^- = \frac{n \times n}{n+n}\frac{n(n-1)}{2}(l^-)^2 2k^- = \frac{n^2(n-1)}{2}k^-(l^-)^2.$$

定理 10 设 $G=(V,\xi_A^+,\xi_A^-,\xi_B^+,\xi_B^-)$ 为双极模糊树，F 是 G 的最大模糊生成树且它本身就是一颗树. 若 F 和 G 有 n 个顶点，F 有 m 条边，对任意 $v \in V$ 有 $\xi_A^+(v)=l^+$ 及 $\xi_A^-(v)=l^-$，且对任意 F 中的边 $vv' \in E(F)$ 有 $\xi_B^+(v,v')=k^+$ 和 $\xi_B^-(v,v')=k^-$，其中 $l^+,k^+ \in [0,1]$，$l^-,k^- \in [-1,0]$. 则有

$$CF^+(F) = \frac{n^2(n-1)m}{2(n+m)}k^+(l^+)^2,\quad CF^-(F) = \frac{n^2(n-1)m}{2(n+m)}k^-(l^-)^2.$$

定理 11 设 $G=(V,\xi_A^+,\xi_A^-,\xi_B^+,\xi_B^-)$ 为完美正则完全双极模糊图，n 和 m 分别是 G 的顶点数和边数，对任意 $v \in V$ 有 $\xi_A^+(v)=l^+$ 及 $\xi_A^-(v)=l^-$，e 是欧拉数，其中 $l^+ \in [0,1]$，$l^- \in [-1,0]$. 则

$$CF^+(G) = \frac{n^2(n-1)}{2(n+m)}\lfloor (n-2)!\ e \rfloor (l^+)^3,\quad CF^-(G) = \frac{n^2(n-1)}{2(n+m)}\lfloor (n-2)!\ e \rfloor (l^-)^3.$$

3 小结

本文针对双极模糊分子图框架，定义了对应的复杂度函数概念，并给出它的基本性质，同时讨论了当图结构是一些基本图形时，复杂度函数的表现形式. 而对于复杂度函数在特定的药物、材料结构中的应用，有待进一步研究.

[参考文献]

[1] GAO W, WANG W. The eccentric connectivity polynomial of two classes of nanotubes [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2016, 89: 290 – 294.

[2] GAO W, WANG W, DIMITROV D, et al. Nano properties analysis via fourth multiplicative ABC indicator calculating [J]. Arabian Journal of Chemistry, 2018, 11 (6): 793 – 801.

[3] GAO W, WU H, SIDDIQUI M K, et al. Study of biological networks using graph theory [J]. Saudi Journal of Biological Sciences, 2018, 25 (6): 1212 – 1219.

[4] GAO W, WANG Y, BASAVANAGOUD B, et al. Characteristics studies of molecular structures in drugs [J]. Saudi Pharmaceutical Journal, 2017, 25 (4): 580 – 586.

[5] GAO W, WANG Y, WANG W, et al. The first multiplication atom-bond connectivity index of molecular structures in drugs [J]. Saudi Pharmaceutical Journal, 2017, 25 (4): 548 – 555.

[6] GAO W, YAN L, SHI L. Generalized Zagreb index of polyomino chains and nanotubes [J]. Optoelectronics and Advanced Materials-Rapid Communications, 2017, 11 (1/2): 119 – 124.

[7] GAO W, AKHTER S, IQBAL Z, et al. The topological aspects of phthalocyanines and porphyrins dendrimers [J]. IEEE Access, 2020, 8: 168631 – 168649.

[8] ŠKREKOVSKI R, DIMITROV D, ZHONG J, et al. Remarks on multiplicative atom-bond connectivity index [J]. IEEE Access, 2019, 7 (1): 76806 – 76811.

[9] GAO W, CHEN Y, WANG Y. Network vulnerability parameter and results on two surfaces [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2021, 36 (8): 4392 – 4414.

[10] GAO W, WANG W, CHEN Y. Tight bounds for the existence of path factors in network vulnerability parameter settings [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2021, 36 (3): 1133 – 1158.

[11] MASHCHENKO S O. Sums of fuzzy sets of summands [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2021, 417: 140 – 151.

[12] ALI S, MATHEW S, MORDESON J N. Hamiltonian fuzzy graphs with application to human trafficking [J]. Information Sciences, 2021, 550: 268 – 284.

（下转第 92 页）

鲜[10-11]，并保证单个果实的独立放置，尽量减少果实之间相互挤压，从而降低烂果率.

[参考文献]

[1] 孙杰，卫旭阳. 高架栽培对草莓生长和果实品质的影响 [J]. 山西农业科学，2021，49（11）：1312-1316.

[2] KIM S K，KIM D S，KIM D Y，et al. Variation of bioactive compounds content of 14 oriental strawberry cultivars [J]. Food Chemistry，2015，184：196-202.

[3] CHAVES V C，CALVETE E，REGINATTO F H. Quality properties and antioxidant activity of seven strawberry (*Fragaria x ananassa* duch) cultivars [J]. Scientia Horticulturae，2017，225：293-298.

[4] 陈卫平. 不同草莓品种果实品质的比较研究 [J]. 江西农业学报，2010，22（9）：46-48.

[5] 张蕊，宋士任，盛忠良，等. 基于专利分析的草莓产业发展趋势研究 [J]. 落叶果树，2017，49（2）：11-14.

[6] 张桂霞，王英超，石璐. 草莓果实成熟过程中 Vc 和可溶性固形物含量的变化 [J]. 安徽农业科学，2011，39（12）：6995-6996.

[7] 廖明安. 园艺植物研究法 [M]. 北京：中国农业出版社，2005.

[8] 段永华，张翠萍，王文智，等. 不同品种和存储期对草莓果实硬度及糖度的影响 [J]. 中国园艺文摘，2017，33（8）：8-9，20.

[9] 敖礼林. 草莓储藏保鲜技术 [J]. 农村百事通，2006（23）：11-12.

[10] 李及华，关军锋，孙玉龙，等. 不同采收成熟度黑宝石李冷藏期间品质变化的研究 [J]. 保鲜与加工，2010，10（3）：22-25.

[11] 贾权，刘斌，韩馨仪，等. 低温贮藏对草莓品质影响研究 [J]. 冷藏技术，2020，43（2）：25-29.

（上接第 64 页）

[13] ATEF M，ATIK A E F E，NAWAR A. Fuzzy topological structures via fuzzy graphs and their applications [J]. Soft Computing，2021，25：6013-6027.

[14] EZHILMARAN D，SANKAR K. Morphism of bipolar intuitionistic fuzzy graphs [J]. Journal of Discrete Mathematical Sciences & Cryptography，2015，18（5）：605-621.

[15] BINU M，MATHEW S，MORDESON J N. Connectivity status of fuzzy graphs [J]. Information Sciences，2021，573：382-395.

[16] BINU M，MATHEW S，MORDESON J N. Cyclic connectivity index of fuzzy graphs [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems，2021，29（6）：1340-1349.

[17] BINU M，MATHEW S，MORDESON J N. Wiener index of a fuzzy graph and application to illegal immigration networks [J]. Fuzzy Sets and Systems，2020，384：132-147.

[18] BINU M，MATHEW S，MORDESON J N. Connectivity index of a fuzzy graph and its application to human trafficking [J]. Fuzzy Sets and Systems，2019，360：117-136.

[19] GONG S，HUA G. Topological indices of bipolar fuzzy incidence graph [J]. Open Chemistry，2021，19：894-903.

[20] KALATHIAN S，RAMALINGAM S，SRINIVASAN N，et al. Embedding of fuzzy graphs on topological surfaces [J]. Neural Computing & Applications，2020，32（9）：5059-5069.