昆明学院学报　2022，44（3）：57～59　ISSN 1674－5639　CN 53－1211/G4
Journal of Kunming University

最大分数 f-因子的注记

高　炜
（云南师范大学 信息学院，云南 昆明 650500）

摘要：假设图 G 存在分数 f-因子，则把其拥有最多边数的分数 f-因子称为 G 的最大分数 f-因子．在两个不同分数 f-因子中定义符号交错路和调整操作，证明可以通过有限次调整操作使得两个分数 f-因子通过它们对应的示性函数的转变而相互转变．定义增广路，并且证明关于示性函数 h 的分数 f-因子是最大分数 f-因子的充分必要条件是 G 中不存在关于示性函数 h 的增广路．

关键词：图；分数因子；符号交错路；增广路
中图分类号：O159　**文献标志码**：A　**文章编号**：1674－5639（2022）03－0057－03
DOI：10.14091/j.cnki.kmxyxb.2022.03.011

Note on Maximum Fractional f-factor

GAO Wei
（School of Information Science and Technology，Yunnan Normal University，Kunming，Yunnan，China　650500）

Abstract：Assuming that the graph G has a fractional f-factor，the fractional f-factor with the largest number of edges is called the maximum fractional f-factor of G. Defining sign-alternatng walk and adjusting operation in two different fractional f-factors，which proves that two fractional f-factors can be transformed into each other via the transform of their indicator functions in terms of a limited number of adjusting operations. An increasing walk is introduced，and the necessary and sufficient condition for a fractional f-factor with respect to indicator function h is then maximum fractional f-factor stated by G has no increasing walk with respect to indicator function h.

Key words：graph；fractional factor；sign-alternatng walk；increasing walk

1　预备知识

本文只考虑无向有限简单图．设 $G=(V(G),E(G))$ 是一个图，f 和 g 是定义在 $V(G)$ 上的非负整数值函数，对任意顶点 x 并满足 $g(x)\leqslant f(x)$．示性函数 $h:E(G)\to[0,1]$ 满足 $g(x)\leqslant\sum_{e\sim x}h(e)\leqslant f(x)$ 成立，其中 $e\sim x$ 表示和顶点 x 相关联的边．$\sum_{e\sim x}h(e)$ 称为顶点 x 的分数度．令 $E_h=\{e\in E(G):h(e)>0\}$，则 G 的支撑子图 G_h 满足 $E(G_h)=E_h$ 称为图 G 的一个分数 (g,f)-因子．进而，分数 (g,f)-因子 G_h 的边数就是在示性函数 h 下值大于零的边数．此方面的相关研究可参阅文献［1－7］．

若 $f\equiv g$，则分数 (g,f)-因子称为分数 f-因子．若 $g(x)=a$，$f(x)=b$ 对任意顶点 x 都成立，则分数 (g,f)-因子称为分数 $[a,b]$-因子．特别地，若对任意顶点 x 有 $g(x)=f(x)=k$，则分数 (g,f)-因子称为分数 k-因子．

假设图 G 存在多个分数 f-因子，把拥有最多边数的分数 f-因子称为图 G 的最大分数 f-因子．为了刻画最大分数 f-因子的特征，首先在分数 f-因子框架下给出在符号交错路，调整操作以及增广路的概念．

约定本文中给出的路径允许每条边最多出现两次．设 G_{h_1} 和 G_{h_2} 是图 G 分别关于示性函数 h_1 和 h_2 的分数 f-因子．记

收稿日期：2022－03－26
基金项目：国家自然科学基金地区基金（12161094）．

作者简介：高炜（1981—），男，浙江绍兴人，教授，博士，主要从事图论、统计学习理论研究．

$$E_{h_1,h_2}^{+}=\{e\in E(G):h_1(e)>h_2(e)\},$$
$$E_{h_1,h_2}^{-}=\{e\in E(G):h_1(e)<h_2(e)\}.$$

图 G 关于 h_1 和 h_2 的符号交错路是一个长度为偶数的闭路径，记为 $C=(e_1,e_2,\cdots,e_{2m})$，其边交替属于 E_{h_1,h_2}^{+} 和 E_{h_1,h_2}^{-}. 符号交错路上的调整操作旨在减少 $|E_{h_1,h_2}^{+}|$ 和 $|E_{h_1,h_2}^{-}|$，具体操作如下：记 $\Delta_{h_1,h_2}=h_1-h_2$. 如果边 e 在该路径上出现两次，则可以把它看成两条平行边 e' 和 e''，且分别分配 $\frac{\Delta_{h_1,h_2}(e)}{2}$ 到 e' 和 e''. 设 $\varepsilon=\min\limits_{e\in E(C)}\{|\Delta_{h_1,h_2}(e)|\}$. 不失一般性，可设 $\Delta_{h_1,h_2}(e_1)>0$. 定义新的示性函数 h_3 如下：$h_3(e_i)=h_1(e_i)-\varepsilon$ 若 i 是奇数；$h_3(e_i)=h_1(e_i)+\varepsilon$ 若 i 是偶数；对所有 $e\in E(G)-E(C)$ 有 $h_3(e)=h_1(e)$. 在调整操作之后，再将平行边 e' 和 e'' 合并为 e，令 $h_3(e)=h_3(e')+h_3(e'')$. 由于调整操作没有改变顶点 x 在示性函数 h_1 下的分数度，因此 G_{h_3} 是图 G 的关于示性函数 h_3 的分数 f-因子，但 $E_{h_3-h_2}$ 的基数小于的 $E_{h_1-h_2}$ 的基数，即

$$|E_{h_3,h_2}^{+}|+|E_{h_3,h_2}^{-}|<|E_{h_1,h_2}^{+}|+|E_{h_1,h_2}^{-}|.$$

图 G 关于示性函数 h 的增广路 W 是一条长度为偶数的闭路径，它的边在大于 0 和小于 1 之间交替，且至少有一条边在 h 下的值为 0. 若将增广路定义为边的序列 $W=(e_0,e_1,\cdots,e_{2m-1},e_0)$，则对于 $0\leqslant r\leqslant m-1$ 有 $h(e_{2r})<1$ 和 $h(e_{2r+1})>0$ 成立，且对某些 i 有 $h(e_{2i})=0$.

2 主要结论及证明

下述定理 1 说明了图 G 的任何两个分数 f-因子可以通过有限次调整操作进行相互转换.

定理 1 设 G_{h_1} 和 G_{h_2} 是图 G 分别关于示性函数 h_1 和 h_2 的分数 f-因子. 则 G_{h_2} 可以由 G_{h_1} 通过有限次重复调整操作得到.

证明 假设 $f\neq g$，定义边集合

$$E_{h_1\neq h_2}=\{e\in E(G):h_1(e)\neq h_2(e)\}.$$

由于 $E_{h_1\neq h_2}\neq\phi$，可设 H 是由边集 $E_{h_1\neq h_2}$ 导出的子图，对于 H 中的边 e 设 $\Delta_{h_1,h_2}(e)=h_1(e)-h_2(e)$. 定义 $E_H^{+}=E^{+}=\{e\in E(H):\Delta_{h_1,h_2}(e)>0\}$ 和 $E_H^{-}=E^{-}=\{e\in E(H):\Delta_{h_1,h_2}(e)<0\}$. 对于顶点 x，设 E_x 是 G 中与顶点 x 相关联的边的集合. 从而对任意顶点 $x\in V(H)$ 有 $|E_H^{+}\cap E_x|\geqslant 1$ 或 $|E_H^{-}\cap E_x|\geqslant 1$ 成立，进而得到 $\delta(H)\geqslant 2$.

下面说明 H 中存在关于示性函数 h_1 和 h_2 的符号交错路. 假设符号交错圈不存在，则在 H 中取长度最长的符号交错路 $P=x_1x_2\cdots x_m$. 不妨设 $\Delta_{h_1,h_2}(x_1x_2)>0$，下面分两种情况讨论.

1）若 m 是奇数，则 $\Delta_{h_1,h_2}(x_{m-1}x_m)<0$. 由于 $\delta(H)\geqslant 2$，必然存在 $i,j\in\{1,2,\cdots,m\}$ 使得 $\Delta_{h_1,h_2}(x_1x_i)<0$ 和 $\Delta_{h_1,h_2}(x_mx_j)>0$ 成立. 从而 $C_1=(x_1,\cdots,x_i,x_1)$ 和 $C_2=(x_j,\cdots,x_m,x_j)$ 均为奇圈. 若 $i>j$，则 $C=(x_1,\cdots,x_j,x_m,\cdots,x_i,x_1)$ 是 H 的符号交错圈；若 $i\leqslant j$，则 $C=(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_m,x_j,\cdots,x_i,x_1)$ 是 H 的符号交错圈.

2）若 m 是偶数，则 $\Delta_{h_1,h_2}(x_{m-1}x_m)>0$. 由于 $\delta(H)\geqslant 2$，必然存在 $i,j\in\{1,2,\cdots,m\}$ 使得 $\Delta_{h_1,h_2}(x_1x_i)<0$ 和 $\Delta_{h_1,h_2}(x_mx_j)<0$ 成立. 从而 $C_1=(x_1,\cdots,x_i,x_1)$ 和 $C_2=(x_j,\cdots,x_m,x_j)$ 均为奇圈. 若 $i>j$，则 $C=(x_1,\cdots,x_j,x_m,\cdots,x_i,x_1)$ 是 H 的符号交错圈；若 $i\leqslant j$，则 $C=(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_m,x_j,\cdots,x_i,x_1)$ 是 H 的符号交错圈.

由于 H 中存在符号交错路，进而通过调整操作得到示性函数 h_3，使得 $|E_{h_3,h_2}^{+}|+|E_{h_3,h_2}^{-}|<|E_{h_1,h_2}^{+}|+|E_{h_1,h_2}^{-}|$. 若 $h_3\neq h_2$，则重复调整操作，进而得到示性函数序列，在有限次调整后使得最后得到的示性函数与 h_2 相同.

下述定理 2 刻画了最大分数 f-因子的特性.

定理 2 设 G_h 是图 G 分别关于示性函数 h 的分数 f-因子. 则 G_h 是最大分数 f-因子当且仅当 G 不存在关于 h 的增广路.

证明 设 G_h 是最大分数 f-因子且 G 存在增广路 $C=(e_1,e_2,\cdots,e_m)$. 设 $E'(C)=\{e\in E'(C):0<h(e)<$

$1\}$，C 中每条边出现不超过 p 次，且

$$\varepsilon = \frac{1}{2p}\min_{e \in E'(C)}\{\min\{h(e), 1-h(e)\}\}.$$

不失一般性，可以设 $h(e_1)=0$. 设：$h'(e_i)=\varepsilon$ 若 i 是奇数；$h'(e_i)=-\varepsilon$ 若 i 是偶数；$h'(e)=0$ 若 $e \in E(G)-E(C)$. 则 $G_{h+h'}$ 是 G 的关于示性函数 $h+h'$ 的分数f-因子，而它的边数为大于 G_h 的边数，这与 G_h 是最大分数f-因子的假设矛盾.

反之，设 G 中没有关于 h 的增广路，证明 G_h 是 G 的最大分数f-因子. 否则，设 $G_{h'}$ 是 G 的最大分数f-因子，对应示性函数 h'，且 $|E_{h'}|>|E_h|$. 进而至少存在一条边 $e_1 \in E(G)$ 使得 $h'(e_1)>0$ 和 $h(e_1)=0$ 成立. 根据定理1，$G_{h'}$ 可以由 G_h 通过一些列调整操作得到，且设 $h=h_0, h_1, \cdots, h_{s-1}, h_s=h'$ 是调整超过过程中对应的示性函数序列，r 是满足 $h_{r-1}(e_1)=0$ 和 $h_r(e_1)>0$ 的最小下标. 进而在 $G_{h_{r-1}}$ 中存在符号交错圈 $C=(e_1, e_2, \cdots, e_m)$ 包含 e_1. 根据符号交错路的定义可知：对任意满足 $h(e)<h'(e)$ 的 $e \in E(C)$，有 $h_{r-1}(e)<h_r(e)$；对任意满足 $h(e)>h'(e)$ 的 $e \in E(C)$，有 $h_{r-1}(e)>h_r(e)$. 进而有：对所有满足 $h(e)<h'(e)$ 的 $e \in E(G)$，对任意 $i=0,1,\cdots,s-1$ 有 $h_i(e) \leqslant h_{i+1}(e)$；对所有满足 $h(e)>h'(e)$ 的 $e \in E(G)$，对任意 $i=0,1,\cdots,s-1$ 有 $h_i(e) \geqslant h_{i+1}(e)$. 进一步，对奇数 j，有

$$h(e_j) \leqslant h_{r-1}(e_j) < h_r(e_j) \leqslant h'(e_j) \leqslant 1.$$

对偶数 j，有

$$h(e_j) \geqslant h_{r-1}(e_j) > h_r(e_j) \geqslant h'(e_j) \geqslant 0.$$

根据 e_1 的选择可知 C 是 G 中关于示性函数 h 的增广路，与假设矛盾.

3 小结和讨论

本文指出图 G 的两个不同两个分数f-因子可以通过有限次调整操作进行相互转换，并且从增广路的角度给出 G_h 是最大分数f-因子的充分必要条件. 然而本文中给出的定理1和定理2无法直接推广到分数(g,f)-因子或者分数$[a,b]$-因子，其根本原因在于不同分数(g,f)-因子或分数$[a,b]$-因子在具体某个顶点上的值不固定，导致定理1证明过程中的 $\delta(H) \geqslant 2$ 不一定成立. 而定理2的证明是基于定理1的，因此定理2也无法直接推广. 关于最大分数(g,f)-因子或最大分数$[a,b]$-因子的刻画，还需要进一步研究.

[参考文献]

[1] GAO W, WANG W. A tight neighborhood union condition on fractional (g, f, n', m) -critical deleted graphs [J]. Colloquium Mathematicum, 2017, 149 (2): 291 - 298.

[2] GAO W, GUIRAO J L G, ABDEL-ATY M, et al. An independent set degree condition for fractional critical deleted graphs [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series S, 2019, 12 (4/5): 877 - 886.

[3] GAO W, GUIRAO J L G, CHEN Y. A toughness condition for fractional (k, m) -deleted graphs revisited [J]. Acta Mathematica Sinica, 2019, 35 (7): 1227 - 1237.

[4] GAO W, LIANG L, XU T, et al. Tight toughness condition for fractional (g, f, n) -critical graphs [J]. Journal of the Korean Mathematical Society, 2014, 51 (1): 55 - 65.

[5] GAO W, WANG W. Degree sum condition for fractional ID-k-factor-critical graphs [J]. Miskolc Mathematical Notes, 2017, 18 (2): 751 - 758.

[6] GAO W, WANG W, DIMITROV D. Toughness condition for a graph to be all fractional (g, f, n) -critical deleted [J]. Filomat, 2019, 33 (9): 2735 - 2746.

[7] GAO W, GUIRAO J L G, WU H. Two tight independent set conditions for fractional (g, f, m) -deleted graphs systems [J]. Qualitative Theory of Dynamical Systems, 2018, 17 (1): 231 - 243.