

# 载流圆线圈的磁场分布研究

杜珊,王琼辉,王婧,项云钊  
(昆明学院 物理科学与技术系,云南 昆明 650214)

**摘要:**利用毕奥-萨伐尔定律计算出载流圆线圈平面内和轴线上磁场分布的数学表达式,并结合实验数据分析研究载流圆线圈平面内部分场点的磁场分布情况以及轴线上磁感应强度的大小.结果表明,载流圆线圈平面内任意点的磁感应强度的大小与线圈半径和该点到圆心的距离有关,而载流圆线圈轴线上的磁场随场点到圆心距离的增大而逐渐减弱,且与轴线两端成对称分布.从而进一步加深了对毕奥-萨伐尔定律的认识.此外,采用软件 Mac Os Grapher 辅助处理实验数据,使结论更具直观性.

**关键词:**载流圆线圈;毕奥-萨伐尔定律;磁感应强度;磁场分布

**中图分类号:**O441.2 **文献标识码:**A **文章编号:**1674-5639(2017)06-0094-04

**DOI:**10.14091/j.cnki.kmxyxb.2017.06.021

## Study on Magnetic Field Distribution of Current-carrying Coil

DU Shan, WANG Qionghui, WANG Jing, XIANG Yunchuang

(Department of Physics Science and Technology, Kunming University, Kunming, Yunnan, China 650214)

**Abstract:** The mathematical expressions of the magnetic field distribution in the plane and the axis of the toroidal circle are calculated by using the Biot-Savart's law, and the magnetic field distribution at the internal point of the plane of the current-carrying coil and the magnetic induction intensity is analyzed. The experimental results show that the size of the magnetic induction intensity at any point in the plane of the carrying coil is related to the radius of the coil and the distance from the point to the center. And the magnetic field on the axis of the current-carrying coil is weakened with the increase of the distance from the point to the center of the circle, and is symmetrical with the two ends of the axis, which deepens the understanding of Biot-Savart's law. In addition, the use of software Mac Os Grapher auxiliary processing experimental data makes the conclusion more intuitive.

**Key words:** current-carrying coil; Bio-Savart's law; magnetic induction intensity; magnetic field distribution

在大学物理教学中讨论载流圆线圈产生的磁场时,通常只给出圆线圈轴线上任意点和圆心处的磁感应强度.本文试图从更一般的角度来探讨这个问题,即运用毕奥-萨伐尔定律计算载流圆线圈平面内任意一点及轴线上的磁感应强度的大小,然后再结合实验数据进行综合性讨论.

度为<sup>[1]</sup>:

## 1 载流圆线圈平面内的磁场分布

### 1.1 理论推导

如图1所示,半径为 $R$ 的圆线圈中流有电流 $I$ , $O$ 为圆心, $P$ 为圆线圈平面内任意一点, $P$ 与圆心的距离为 $a$ .在圆线圈上任一点 $A$ 处取电流元 $Id\vec{l}$ ,则根据毕奥-萨伐尔定律可得, $Id\vec{l}$ 在 $P$ 点产生的磁感应强

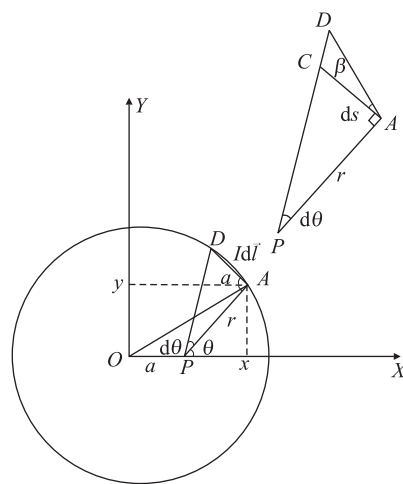


图1 载流圆线圈平面内任意点的磁感应强度

收稿日期:2017-06-29

作者简介:杜珊(1963—),女,云南昆明人,副教授,主要从事大学物理学和普通物理实验教学与研究.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3},$$

式中 $\vec{r}$ 是 $Id\vec{l}$ 对 $P$ 点的位置矢量,该矢量方向由 $A$ 指 $P$ ,其大小为 $r = AP$ . $\vec{r}$ 和 $Id\vec{l}$ 的夹角为 $\alpha$ ,将上式写成标量式,则

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}.$$

$d\vec{B}$ 的方向由右手螺旋定则确定,为垂直于纸面指向外.因为圆线圈上每一个电流元在 $P$ 点的磁感应强度方向相同,所以由磁场的叠加原理可得 $P$ 点的磁感应强度大小:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi R} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}. \quad (1)$$

为了计算方便,连接 $OP$ 并取它与 $X$ 轴重合,其垂直方向为 $Y$ 轴,在 $OXY$ 坐标系中,圆的方程是<sup>[2]</sup>:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

令 $\vec{r}$ 与 $X$ 轴之间的夹角为 $\theta$ ,则有:

$$(r \cos \theta + a)^2 + (r \sin \theta)^2 = R^2,$$

$$r^2 + 2a r \cos \theta + a^2 - R^2 = 0,$$

$$r = -a \cos \theta \pm \sqrt{R^2 - (a \sin \theta)^2}.$$

因为 $P$ 是圆内任意一点,所以 $r$ 的值不会小于零,由此可求得 $r$ 与 $\theta$ 之间的函数关系式为:

$$r = \sqrt{R^2 - (a \sin \theta)^2} - a \cos \theta. \quad (2)$$

在图1中作 $AC \perp DP$ ,并令 $AC$ 与 $AD$ 之间的夹角为 $\beta$ ,则可得

$$dl \sin \alpha = dl \sin \left( \frac{\pi}{2} + \beta \right) = dl \cos \beta = rd\theta. \quad (3)$$

顺便指出,在图1中, $Id\vec{l}$ 与 $\vec{r}$ 之间的夹角 $\alpha > \pi/2$ .如果 $\alpha < \pi/2$ ,则有 $dl \sin \alpha = dl \sin(\pi/2 - \beta) = dl \cos \beta = rd\theta$ ;当 $\alpha = \pi/2$ 时, $dl \sin \alpha = dl = rd\theta$ .因为 $0 < \alpha < \pi/2$ .因此,总有关系式 $dl \sin \alpha = rd\theta$ 成立.把(2)式和(3)式代入(1)式,得:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{R^2 - (a \sin \theta)^2} - a \cos \theta},$$

将被积函数中的分子分母同时乘以 $(\sqrt{R^2 - (a \sin \theta)^2} + a \cos \theta)$ ,并且

$$\int_0^{2\pi} a \cos \theta d\theta = 0,$$

$$\text{得} \quad B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{R^2 - a^2} \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

$$\text{令} \frac{a}{R} = K, B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{R^2 - a^2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \theta} d\theta. \quad (4)$$

因为<sup>[3]</sup>:

$$E = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \theta} d\theta = 2\pi \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 K^2 - \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{K^4}{3} - \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{K^6}{5} - \dots \right],$$

$$\text{所以} E = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \theta} d\theta = 2\pi \left[ 1 - \left( \frac{1}{4} \right) K^2 - \left( \frac{9}{64} \right) \frac{K^4}{3} - \dots \right],$$

略去含有 $K$ 的4次幂和更高次幂的各项,将 $K$ 换为 $a/R$ ,得:

$$E = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \theta} d\theta = 2\pi \left[ 1 - \left( \frac{1}{4} \right) \frac{a^2}{R^2} \right] = \frac{\pi(4R^2 - a^2)}{2R^2}, \quad (5)$$

将(5)式代入(4)式得:

$$B = \frac{\mu_0 I}{8R} \frac{(4R^2 - a^2)}{(R^2 - a^2)} = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{(4R^2 - a^2)}{4(R^2 - a^2)}. \quad (6)$$

因为 $P$ 点是圆线圈平面内的任意一点,过任意点都可以作出一个过圆心的 $x$ 轴线,所以上式对圆线圈平面内的所有点都适用.

下面对一些特殊点进行讨论,由(6)式得出不同的点 $B$ 与 $a$ 的关系,并画出 $B$ 随 $a$ 的变化关系曲线.

1) 当 $a = 0$ (即圆心处), $B_0 = \mu_0 I / 2R$ ;

2) 当 $a = \pm R/4$ 时, $B = 1.05B_0$ ;

3) 当 $a = \pm 2R/4$ 时, $B = 1.25B_0$ ;

4) 当 $a = \pm 3R/4$ 时, $B = 1.96B_0$ ;

5) 当 $a = \pm R$ 时, $B = \infty$ .此种情况在物理上没有意义.

根据以上讨论可得载流圆线圈平面内 $B \sim a$ 关系曲线,如图2所示.

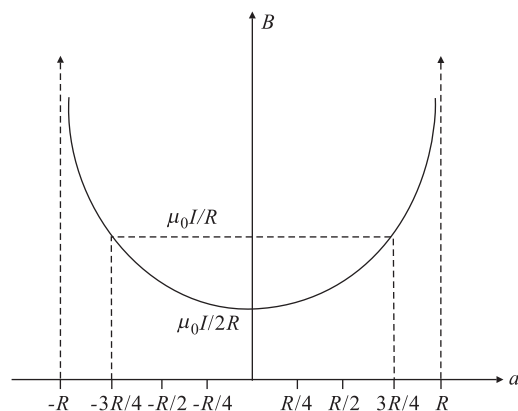


图2 平面上 $B$ 与 $a$ 的关系曲线

## 1.2 实验研究

为了验证上述理论的正确性,可利用亥姆赫兹线圈磁场实验仪(HZDH)测量载流圆线圈平面内不

同点的磁感应强度数值,同时利用(6)式计算其理论值,并将理论值和实验值进行比较分析.有关参数、实验数据见表1和表2.

表1 实验中的有关参数

物理量	圆线圈匝数 $N/\text{匝}$	圆线圈电流 $I/\text{mA}$	圆线圈半径 $R/\text{mm}$	真空中的磁导率 $\mu_0/(\text{N} \cdot \text{A}^{-2})$	$B_0$ 的理论值/ $\text{mT}$
数值	500	500	110	$4\pi \times 10^{-7}$	1.427

表2 载流圆线圈平面上部分场点的磁感应强度理论值和测量值

$a/\text{mm}$	-40.00	-30.00	-20.00	-10.00	0.00	10.00	20.00	30.00
测量值 $B/\text{mT}$	1.681	1.584	1.522	1.481	1.467	1.474	1.494	1.524
理论值 $B/\text{mT}$	1.590	1.513	1.464	1.436	1.427	1.436	1.464	1.513

取圆线圈平面上一直径为横坐标,表2中各场点  $a$  分布在该坐标轴上,以与它们所对应的磁感应强度  $B$  为纵坐标,根据表2的数据,画出各场点的磁感应强度  $B$  与  $a$  的关系曲线,如图3所示.

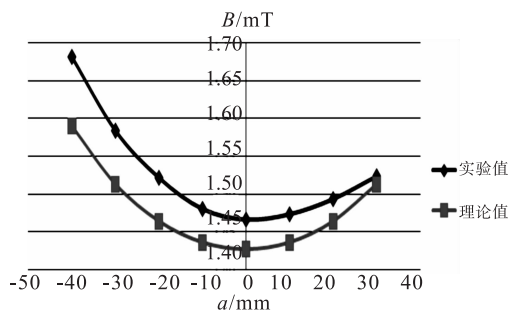


图3 平面上  $B$  与  $a$  的关系曲线

为了更全面、直观地反映载流圆线圈平面内其他场点磁场的分布情况,借助 Mac Os Grapher 软件,并参照表2的数据作出平面内不同直径轴线上各点的磁感应强度  $B$  与  $a$  的关系曲线,以便理解不同角度的磁场分布情况,进一步验证(6)式对圆线圈平面内的所有点都适用,如图4所示.

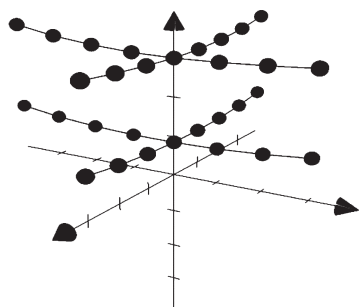


图4 平面上不同角度  $B$  与  $a$  的关系曲线

## 1.3 实验结论

上述实验中,通过线圈的电流是直流电流,主要测量的是磁感应强度的大小.从  $B$  随  $a$  的变

化关系曲线(图3和图4)可以看出,它们符合相同的规律,即圆心处磁感应强度  $B$  值最小.随着  $a$  的增大,  $B$  也增大.且任意直径上点的磁感应强度大小相对圆心处呈对称性分布,这样就验证了(6)式的正确性,即在载流圆线圈平面内,磁场分布是不均匀的,同时也进一步加深了对毕奥-萨伐尔定律的认识.对于上述分析,图4看到的结论更具普遍性和直观性.

## 2 载流圆线圈轴线上的磁场分布

### 2.1 理论推导

如图5所示,半径为  $R$  的圆线圈,在线圈中通上电流时,则通电线圈就会在其周围空间激发磁场<sup>[4]</sup>.设线圈上某点  $A$  处的电流元在线圈轴线上任意点  $P$  产生了元磁场  $d\vec{B}$ ,它的方向垂直于  $PA$  连线并和  $POA$  面处于同一面内,且  $d\vec{B}$  与轴线  $OP$  的夹角  $\alpha = \angle PAO$ .

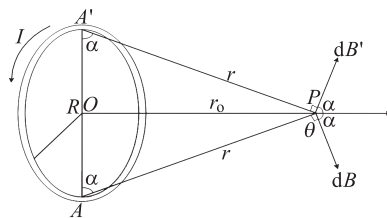


图5 线圈轴线上的磁场

根据毕奥-萨伐尔定律  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l}}{r^2} \sin\theta$ , 对于轴线上的点  $P$ ,  $\theta = \pi/2$ ,  $\sin\theta = 1$ . 设  $r_0$  为  $P$  点到线圈中心的距离, 则  $r_0 = r\sin\alpha$ ,  $r = \frac{r_0}{\sin\alpha}$ ,  $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r_0^2} \sin^2\alpha$ .

由磁场的叠加原理得  $B = \int dB \cos\alpha$ ,

$$B = \oint dB \cos\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_0^2} \sin^2\alpha \cos\alpha \oint dl. \quad (7)$$

$$\text{由于 } \cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + r_0^2}}, \sin\alpha = \frac{r_0}{\sqrt{R^2 + r_0^2}},$$

$$\oint dl = 2\pi R,$$

$$\text{则 } B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + r_0^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + r_0^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (8)$$

(8) 式有以下两种特殊情况<sup>[5]</sup>:

1) 在圆心处,  $r_0 = 0, B = \mu_0 I / 2R$ ;

2) 当  $r_0 \gg R$  时,  $B = \mu_0 R^2 I / 2r_0^3$ .

## 2.2 实验研究

下面采用实验的方法研究载流圆线圈轴线上的磁感强度分布. 取电流  $I = 500 \text{ mA}$ , 线圈平均半径  $R = 11.00 \text{ cm}$ , 线圈匝数  $N = 500$  匝, 并且真空磁导率  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ . 载流圆线圈轴线上不同位置磁感应强度  $B$  的测量结果见表 3.

表 3 轴线上不同位置的磁感强度

$r/\text{cm}$	-7.00	-6.00	-5.00	-4.00	-3.00	-2.00	-1.00	0.00	1.00
$B/\text{mT}$	0.880	0.992	1.106	1.221	1.319	1.397	1.444	1.451	1.425
$r/\text{cm}$	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00
$B/\text{mT}$	1.363	1.274	1.165	1.048	0.932	0.820	0.716	0.626	0.547

以  $r$  为横坐标,  $B$  为纵坐标画出载流圆线圈轴线上磁场分布情况, 如图 6 所示 (坐标原点在圆心处).

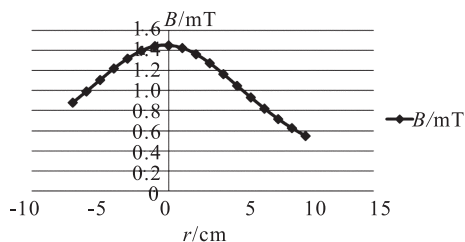


图 6 载流圆线圈轴线上磁场分布曲线

同样, 也可应用 Mac Os Grapher 软件画出上图, 该图能更直观地反映载流圆线圈轴线上磁场的分布情况, 如图 7 所示.

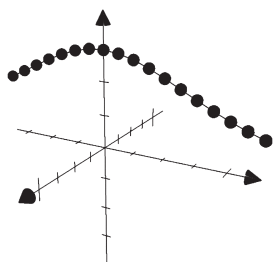


图 7 Grapher 绘制的载流圆线圈轴线上磁场分布曲线

根据 (6) 式, 1) 在圆心处磁感应强度的理论计算值为:  $B = B(0) = \mu_0 NI / 2R = 1.43 \text{ mT}$ ; 而实验测得的圆心处磁感应强度值:  $B'(0) = 1.45 \text{ mT}$ .

$$\text{百分误差: } \varepsilon = \frac{|B'(0) - B(0)|}{B(0)} \times 100\% = \frac{|1.45 - 1.43|}{1.43} \times 100\% \approx 1.4\%.$$

2)  $r_0 = 5 \text{ cm}$  时, 可得此时的理论值为:  $B(5) =$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 NI}{(R^2 + r_0^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 R^2 NI}{2(R^2 + r_0^2)^{\frac{3}{2}}} = 1.077 \text{ mT}; \text{实验}$$

中测得的值:  $B'(5) = 1.048 \text{ mT}$ .

$$\text{则百分误差: } \varepsilon = \frac{|B'(5) - B(5)|}{B(5)} = \frac{|1.048 - 1.077|}{1.020} \times 100\% \approx 2.7\%.$$

## 2.3 实验结论

实验中, 我们采用霍尔元件测出磁场中不同点的磁感应强度  $B$ , 取代了传统的线圈感应法测磁场, 即不必靠人为缓慢转动线圈平面与磁场垂直, 通过判断感应电动势的“极大值”来测  $B$  的大小, 大大提高了实验的精度, 有效地减小了系统误差. 此外, 从图 6 可看出, 当载流圆线圈轴线上的点在圆心处时, 磁感应强度为最大, 并且圆线圈轴线上的磁感应强度随  $x$  与圆心距离的增大而逐渐减小<sup>[5]</sup>. 轴线两边的磁场以轴线中心为原点成对称性分布, 说明实验和理论能很好地契合.

## 3 小结

综上所述, 本文利用毕奥 - 萨伐尔定律分别对载流圆线圈平面内任意一点和轴线上任意点的磁感应强度进行了理论推导, 并进行了实验研究, 进一步验证了理论推导的正确性, 从而揭示了载流圆线圈平面内及轴线上的磁场分布规律. 此外, 在上述研究中我们使用了软件 Mac Os Grapher 辅助处理实验数据, 使得结论更具直观性, 如果把此方法运用到教学中, 则能够激发学生的好奇心, 调动学生的学习积极性, 使学生更好地理解磁场的分布情况, 从而提高教学质量.

(下转第 100 页)

$$\hat{n} = 1 + \frac{\lambda}{2d} \frac{1}{\hat{b}} P. \quad (6)$$

折射率  $n$  的不确定度为:

$$u(\hat{n}) = \frac{\lambda P}{2d} \frac{1}{\hat{b}^2} u(\hat{b}). \quad (7)$$

将  $P = 80\,800.0\text{ Pa}^{[6]}$ ,  $\lambda = 6.238 \times 10^{-7}\text{ m}$ ,  $d = 0.2\text{ m}$ ,  $u(\hat{b}) = 3.5179$  分别代入(6)式和(7)式,得  $\hat{n} = 1.000\,197$  和  $u(\hat{n}) = 0.000\,001$ .

所以本地空气折射率为  $n = 1.000\,197 \pm 0.000\,001$ .

### 3 误差分析

取实验室温度为  $20^\circ\text{C}$ , 压强  $P_0 = 80\,800.0\text{ Pa}$ , 代入式(4)得  $n_t = 1.000\,217$ , 因此实验数据的相对误差为:

$$\frac{|\hat{n} - n_t|}{n_t} \times 100\% = \frac{|1.000\,197 - 1.000\,217|}{1.000\,217} \times 100\% = 0.002\%.$$

分析实验误差的来源, 本文认为主要来源于 3 个方面:

1) 人为因素. 在玻璃空气室放气过程中, 若放气速度快, 干涉条纹“冒出”速度太快, 则会多读或少读干涉条纹的个数.

2) 环境因素. 人在实验室走动、说话和实验室周围地面的振动等因素, 均会使干涉条纹抖动, 影响对干涉条纹的读数, 因此实验中应尽量使干扰降低到最小.

3) 测量结果还与实验室温度有关. 为此本文选

择用(4)式作为误差分析的依据.

### 4 结语

综上所述, Origin 软件线性拟合的结果与用最小二乘法线性拟合的结果吻合得很好. 用 Origin 软件进行数据拟合时, 计算与作图完全由计算机完成, 整个过程简洁高效, 图形变化趋势明显直观, 同时还避免了一系列人为因素造成的实验误差, 因此应用 Origin 软件处理实验数据是一种不错的选择. 此外, 在设计性实验中应用 Origin 软件进行教学, 有助于提高学生探索科学的兴趣, 培养学生今后独立进行科研活动的能力, 可以达到事半功倍、举一反三的教学效果.

### [参考文献]

- [1] 陈正维. 一元线性问题中的实验标准差[J]. 大学物理, 2004, 23(6): 35-36.
- [2] 籍延坤, 焦志伟. 牛顿环实验的一种数据的处理方法[J]. 物理与工程, 2000, 10(5): 40-42.
- [3] 胡素梅, 陈海波. 基于 Origin 的牛顿环实验数据处理方法[J]. 吉首大学学报(自然科学版), 2006, 27(6): 51.
- [4] 林抒, 龚镇雄. 普通物理实验[M]. 北京: 人民教育出版社, 1981: 399.
- [5] 董晓菲. 迈克耳逊干涉仪测空气折射的原理[J]. 佳木斯大学学报(自然科学版), 2016, 34(6): 1038.
- [6] 百度文库. 海拔与大气压对照表[EB/OL]. [2017-04-15]. <https://wenku.baidu.com/view/02cc1ac9767f5acfa0c7cd64.html>.

(上接第 97 页)

### [参考文献]

- [1] 赵凯华, 陈熙谋. 电磁学[M]. 北京: 高教出版社, 2003: 94-98.
- [2] 沈犁理, 钟寿仙. 圆电流所包围的平面内磁感应强度的分布[J]. 昆明师专学报, 1997, 12(2): 46-47.
- [3] 胡邵宗. 椭圆积分的计算及其应用[J]. 大学数学, 2013, 29(1): 111-113.
- [4] 张玉明, 威博云. 电磁学[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2008: 213-226.
- [5] 杨述武, 赵立竹, 沈国土. 普通物理实验 2: 电磁学部分[M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2011: 126-132.