

弹簧质量系统非线性振动的实验研究

黄焱¹,何松林²

(1. 昆明学院 物理科学与技术系, 云南 昆明 650214; 2. 昆明学院 资产与实验室管理处, 云南 昆明 650214)

摘要:采用实验方法研究了一类垂直悬挂的弹簧质量系统沿水平方向的自由振动, 观察到振动周期随振幅及弹簧悬点高度的增加而减小. 数据分析发现, 采用等效质量方法考虑弹簧质量的影响后, 非线性振动理论模型所得结果与实验数据吻合, 但弹簧质量系统的等效质量系数小于该系统进行简谐振动时的等效质量系数, 且与弹簧的最大拉伸长度有关.

关键词:弹簧质量系统; 等效质量系数; 非线性振动; 周期

中图分类号: O322 **文献标识码:** A **文章编号:** 1674-5639(2014)06-0066-03

Experiment on the Nonlinear Vibration of the Spring-mass System

HUANG Yan¹, HE Song-lin²

(1. Department of Physics Science and Technology, Kunming University, Yunnan Kunming 650214, China;

2. Department of Assets and Laboratory Management, Kunming University, Yunnan Kunming 650214, China)

Abstract: The free vibration along the horizontal direction of the vertical hanging spring-mass system has been studied with experimental method. It is observed that the period decreases with the increasing of vibration amplitude and the height of spring suspension point. Data analysis reveals that the result of the theoretical calculation of nonlinear vibration model using the equivalent mass approximation is in accordance with the experimental data. It is found that the equivalent mass coefficient of this vertical hanging spring-mass system is smaller than that of the same spring-mass system processing simple harmonic vibration and this coefficient is related to the maximum tensile length of spring.

Key words: spring-mass system; equivalent mass coefficient; nonlinear vibration; period

非线性振动是普遍存在的振动形式, 其研究报道一直不断^[1-3]. 弹簧质量系统作为重要的物理和机械模型, 相关的单弹簧或对称多弹簧振子(忽略弹簧质量的弹簧质点系统)的横向非线性振动的理论研究和数值仿真研究近年报道很多^[4-6], 但采用实验方法研究实际弹簧质量系统的振动情况未见报道. 本文拟对垂直悬挂的实际单弹簧质量系统水平方向的横向运动进行实验研究, 旨在探索出实验规律及其他有益的结果.

1 实验设计

用一根弹簧及一个物体构成垂直悬挂的弹簧质量系统, 使物体限制在水平面上运动. 系统示意如图 1, 自身质量为 m 的弹簧, 其劲度系数为 k , 原长为 l_0 , 物体质量为 M , 静止时其到悬点的距离为 h . 实验时, 将物体沿水平方向拉离平衡位置, 然后释放, 物体将在水平方向振动. 实验中通过测量不同振幅及不同悬点高度时系统振动的周期值, 得出该系统沿水平方向的振动规律及特点.

弹簧劲度系数的测量采用上海复旦天欣科教仪器有限公司生产的 FD_GLB_II 新型焦利秤, 并用电子天平称量出弹簧及物体的质量. 弹簧质量系统的振动试验在青峰机械厂生产的气垫导轨上进行, 按图 1 悬挂弹簧后, 让滑块在调平后的导轨上能无阻的滑动. 将滑块拉离平衡位置后, 仔细观察物体在导轨上的振动情况. 采用 FD-CT-II 计数计时仪计时, 测量滑块振动 10 次所需要的时间, 得出系统的振动周期.

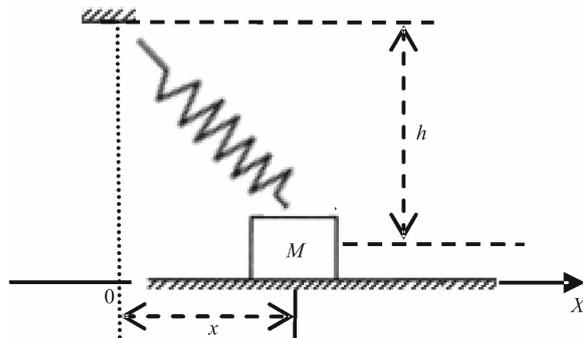


图1 弹簧质量系统在水平方向运动

收稿日期: 2014-11-17

作者简介: 黄焱(1971—), 女, 云南曲靖人, 副教授, 主要从事非线性振动和物理实验研究.

2 实验数据及处理

2.1 系统的基本参数

经过一系列测量和处理后,可以得出本次试验所用弹簧和滑块的基本参数,记录如表1.

表1 弹簧质量系统的系统参数

弹簧自然长度/cm	弹簧质量 m/g	弹簧劲度系数 $k/(N \cdot m^{-1})$	滑块质量 M/g	系统简谐振动周期 T_0/s
12.40	13.77	1.618	113.71	1.7204

2.2 振动周期随悬点高度的变化

为观察弹簧悬点高度对周期的影响,保持振幅 $A=9.00\text{ cm}$ 不变,通过调节支架高度改变悬点高度,并测量每个悬点高度下系统振动10次所需时间,得到对应该悬点高度的振动周期.具体数据如表2.从表2可以明显看出,振动周期随悬挂点高度的增加而减小.

表2 弹簧质量系统不同悬点高度的周期

h/cm	$t1/s$	$t2/s$	$t3/s$	t/s	$T=(t/10)/s$
25.35	19.754	19.756	19.755	19.758	1.9756
27.50	19.442	19.447	19.447	19.445	1.9445
29.80	19.227	19.227	19.222	19.225	1.9225
32.00	19.036	19.037	19.037	19.037	1.9037
34.05	18.898	18.896	18.892	18.895	1.8895
36.15	18.768	18.753	18.768	18.763	1.8763
38.30	18.674	18.585	18.705	18.655	1.8655
40.60	18.565	18.572	18.570	18.569	1.8569

2.3 振动周期随振幅的变化

将滑块拉离平衡位置后释放,滑块将沿水平方向振动.为观察振幅对周期的影响,在保持弹簧悬点高度 $h=25.40\text{ cm}$ 不变的情况下,测量不同振幅时系统振动10次所需时间,得到对应该振幅的振动周期值.具体数据如表3.从表3可以明显看出,振动周期随振幅的增加而减小,反映了弹簧质量系统沿水平方向的非线性振动性质.

表3 弹簧质量系统不同振幅的周期

A/cm	$t1/s$	$t2/s$	$t3/s$	t/s	$T=(t/10)/s$
3.00	19.993	19.984	19.989	19.989	1.9989
5.00	19.929	19.928	19.923	19.927	1.9927
7.00	19.841	19.837	19.844	19.841	1.9841
9.00	19.735	19.743	19.744	19.741	1.9741
11.00	19.661	19.664	19.658	19.661	1.9661
13.00	19.562	19.567	19.570	19.566	1.9566
15.00	19.457	19.472	19.473	19.467	1.9467

3 实验结果及讨论

3.1 实验规律

从实验数据可得出以下规律,竖直悬挂的弹簧质量系统被限定在水平面上运动时,在有限振幅和

有限的悬点高度条件下,系统将进行非线性振动,系统的周期将随振幅和悬点高度的增加而减小.这些实验结果定性的与理论分析一致^[7],其定量的差异应该来源于弹簧自身质量的影响.

3.2 系统振动微分方程

在分析弹簧质量对系统线性振动性质的影响时,常采用等效质量法进行处理^[8-10],即将弹簧质量的影响看成是增加了物体的有效质量.在此沿用该方法对弹簧质量系统的非线性振动进行研究.按此方法,将图1所示系统的有效质量记为 $\mu = M + pm$,其中 p 称为等效质量系数,其值应与系统的自身性质及所处状态有关.由牛顿第二定律可得图1所示实际单弹簧质量系统沿水平方向运动的微分方程为

$$\ddot{x} + \frac{k}{\mu} \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right) x = 0. \quad (1)$$

3.3 系统振动的周期公式

在初始条件 $x(0) = x_0 (A = |x_0|)$ 和 $\dot{x}(0) = 0$ 下,将方程(1)积分

$$\int_0^x \dot{x} dx = - \int_{x_0}^x \frac{k}{\mu} \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right) x dx, \quad (2)$$

从而可得

$$x^2 = \frac{k}{\mu} [x_0^2 - 2l_0 \sqrt{x_0^2 + h^2} - x^2 + 2l_0 \sqrt{x^2 + h^2}]. \quad (3)$$

系统位移由0变到A,所需时间为1/4周期,由(3)式可得振动的周期为

$$T = 4 \sqrt{\frac{\mu}{k}} \int_0^A [A^2 - 2l_0 \sqrt{A^2 + h^2} - x^2 + 2l_0 \sqrt{x^2 + h^2}]^{-\frac{1}{2}} dx. \quad (4)$$

$$\text{令 } I = \int_0^A [A^2 - 2l_0 \sqrt{A^2 + h^2} - x^2 + 2l_0 \sqrt{x^2 + h^2}]^{-\frac{1}{2}} dx, \quad (5)$$

且假设弹簧质量系统非线性振动时的等效质量系数与弹簧的最大伸长有关,将其表示为

$$p = p_0 \left(1 - \alpha \frac{l_0}{\sqrt{h^2 + A^2}} \right), \quad (6)$$

其中 p_0 是系统简谐振动时的等效质量系数,可根据实验中测出的系统简谐振动周期计算得出. α 是参数,可通过对实验数据的拟合得到.系统振动的周期公式可表示为

$$T = 4 \sqrt{\frac{M + p_0 \left(1 - \alpha \frac{l_0}{\sqrt{h^2 + A^2}} \right) m}{k}} I. \quad (7)$$

3.4 实验数据拟合

由表1的数据 $M=0.11371\text{ kg}$, $m=0.01377\text{ kg}$, $k=1.618\text{ N/m}$,及简谐振动周期 $T_0=2\pi \sqrt{\frac{M+p_0m}{k}}=1.7204\text{ s}$,可得简谐振动时系统的等效质量系数 $p_0=0.5515$.将表2数据按(7)式进行曲线拟合,式中的积分 I 采用辛普森数值积分法进行计算,拟合

得到 $\alpha = 10.10$. 拟合曲线如图 2, 其中实线是拟合曲线, 圆圈表示实验值. 从图中可以看出拟合效果不错, 说明(7)式确实可以正确描述竖直悬挂的弹簧质量系统的周期. 为观察系统振动周期随振幅和悬点高度的增加而产生的变化趋势, 将拟合得到的参数 $\alpha = 10.10$ 及表 1 中的各系统参数代入到(7)式中, 分别在固定 $h = 25.40 \text{ cm}$ 和 $A = 9.00 \text{ cm}$ 的情况下作出 $T \sim A$ 图和 $T \sim h$ 图, 结果如图 3 和图 4, 其中实线是依据(7)式得到的曲线, 圆圈是表 3 和表 2 的实验值对应的点.

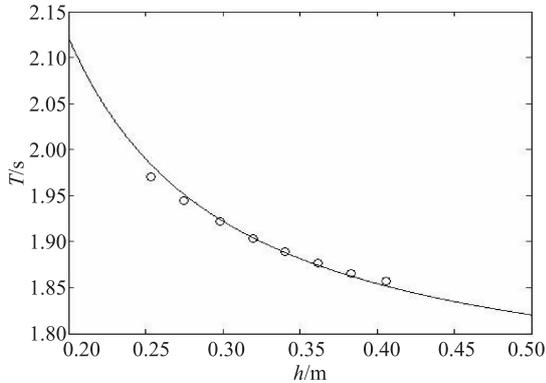


图2 实验数据拟合曲线

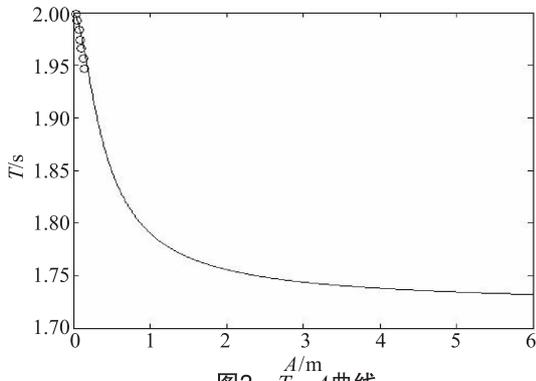


图3 $T \sim A$ 曲线

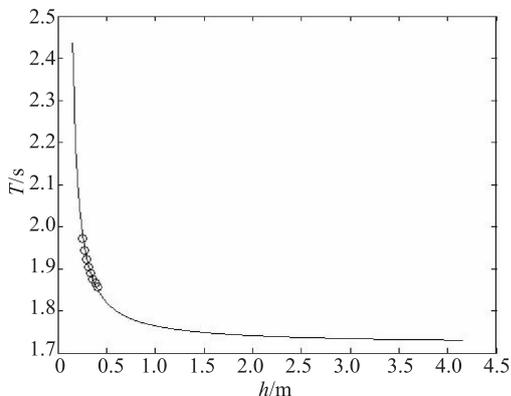


图4 $T \sim h$ 曲线

从以上两图可见, 虽然由于实验条件的限制, 实验数据仅集中出现在一个较小范围内, 但实验数据点与曲线符合较好, 表明按(7)式所画曲线确实能反映系统的振动周期随振幅及悬挂点高度的变化. 从图 3 和图 4 可见, 振幅或悬挂点高度(大于弹簧原长)较小时, 周期随它们的增大而快速减小; 而当振幅或悬挂点高度增加到一定程度后, 周期随它们的增加变得越来越缓慢; 振幅或悬挂点高度进一步的增加, 系统的周期将逐渐趋向于系统简谐振动周期.

4 结论

通过前面的实验数据分析, 可以得出以下结论: 竖直悬挂的实际弹簧质量系统在光滑水平面上的运动是非线性自由振动, 振动周期随悬挂点高度及振幅的增加经历从快速减小到缓慢减小, 最后趋向于简谐振动周期的变化; 弹簧质量系统非线性振动时的等效质量系数小于简谐振动时的等效质量系数, 并且与弹簧被拉伸的最大长度有关.

综上所述, 通过具体的实验观察、测量, 以及对实验数据的深入分析, 得到了竖直悬挂的弹簧质量系统在光滑水平面上的运动规律, 总结出弹簧质量系统等效质量系数在非线性振动下的变化情况, 这一工作加深了对弹簧质量系统振动的认识, 对实际工程中弹簧质量系统的应用有指导意义.

[参考文献]

- [1] 蔡萍, 唐驾时. 强非线性振动系统极限环振幅控制研究[J]. 振动与冲击, 2013(9): 110 - 112.
- [2] 陈恩利, 田瑞兰, 郜浩冬. 海洋波力发电倒置摆系统的非线性振动实验研究[J]. 振动与冲击, 2012, 31(15): 105 - 109.
- [3] 王成会, 程建春. 微管内气泡的受迫振动[J]. 物理学报, 2012, 61(19): 260 - 266.
- [4] 廖旭, 任学藻. 组合线性弹簧振子中的非线性振动[J]. 大学物理, 2008, 27(2): 141 - 145.
- [5] 倪亚贤, 董慎行. 对称非线性弹簧振子的周期特性[J]. 大学物理, 2003, 22(4): 22 - 24.
- [6] 何松林. 对称双弹簧振子横向振动的椭圆函数解[J]. 大学物理, 2011, 30(5): 27 - 31.
- [7] 黄焱, 何松林. 一类弹簧质量系统的非线性振动研究[J]. 昆明学院学报, 2013, 35(3): 76 - 78, 82.
- [8] 丁履成, 司明扬. 有质量的弹簧的振动问题[J]. 大学物理, 1985, 4(9): 15 - 181.
- [9] 黄兆梁. 弹簧质量对振动的影响[J]. 大学物理, 1999, 17(3): 12 - 161.
- [10] 倪振华. 振动力学[M]. 西安交通大学出版社, 1989: 50 - 511.