昆明学院学报　2015, 37(3):47~51　CN 53-1211/G4　ISSN 1674-5639
Journal of Kunming University

随机矩阵非 1 特征值的定位

刘　琼,李耀堂*
（云南大学 数学与统计学院,云南 昆明 650091）

摘要:利用 Dashnic-Zusmanovich 矩阵的非奇异性给出随机矩阵非奇异的 2 个新的充分条件,得到了随机矩阵的 2 个新的非 1 特征值包含集. 数值实例表明,在某些情况下所得结果改进了几个已有结果.

关键词:随机矩阵;Dashnic-Zusmanovich 矩阵;非奇异;特征值定位.
中图分类号:O151. 21　**文献标识码**:A　**文章编号**:1674-5639(2015)03-0047-05
DOI:10. 14091/j. cnki. kmxyxb. 2015. 03. 011

Localization of Eigen Values for NOT 1 Stochastic Matrices

LIU Qiong, LI Yao-tang*
(College of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Yunnan Kunming 650091, China)

Abstract: Two new sufficient conditions of nonsingular stochastic matrices are given by using the nonsingularity of Dashnic-Zusmanovich matrices to obtain two new localization sets of NOT 1 eigen values of stochastic matrices. Numerical examples show that the results improve the existing results in some cases.

Key words: stochastic matrix; Dashnic-Zusmanovich matrix; singular; eigen values orientation.

矩阵特征值定位问题(即用尽可能少的计算得到给定矩阵 A 的特征值的尽可能精确的包含区域)是矩阵理论及其应用研究的重要课题之一,在许多领域有着广泛的应用背景[1-5]. 随机矩阵作为特殊的非负矩阵具有重要的应用价值,其特征值估计问题在计算机辅助几何设计[6]、有限 Markov 过程[7]等领域都发挥着重要作用,也经常出现在数理经济学与运筹学的各种模型里.

如果非负矩阵 $A=[a_{ij}]\in R^{n\times n}$ 的所有行和都为 1,即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=1,(1\leqslant i\leqslant n),$$

则称 A 为随机矩阵,记矩阵 A 的谱为 $\delta(A)$. 设 $A=[a_{ij}]\in R^{n\times n}$ 为随机矩阵,则 $Ae=1\cdot e$,故 1 是任何随机矩阵的特征值,且由著名的 Gershgorin 特征值定理知,1 是随机矩阵 A 的模最大特征值. 因此,随机矩阵的特征值定位问题就是非 1 特征值的定位问题[8]. 文献[4]利用 Gershgorin 定理估计随机矩阵的特征值,最终得到了精确的 Gershgorin 圆盘集. 文献[9]通过改进著名的 Brauer 卵形定理,给出了随机矩阵更精确的特征值包含集.

本文利用 Dashnic-Zusmanovich 矩阵的非奇异性,研究随机矩阵非奇异的条件,然后利用其讨论随机矩阵非 1 特征值的包含区域,得到了一些新结果,改进了几个现有结论.

1　预备知识

为下文的叙述和证明方便,首先给出一些定义、引理和定理.

收稿日期:2015-03-12
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11361074).
作者简介:刘琼(1991—),女,陕西西安人,硕士生,主要从事矩阵理论及其应用研究.
* **通讯作者**:李耀堂(1958—),男,陕西宜川人,教授,博士生导师,主要从事数值代数及其应用研究,E-mail:liyaotang@ynu,edu. cn.

定义 1[1] 设 $A=[a_{ij}]\in C^{n\times n}(n\geqslant 2)$,若存在 $i\in N$ 使得对任意 $j\in N,j\neq i$,

$$|a_{ii}|(|a_{jj}|-r_j(A)+|a_{ji}|)>r_i(A)\cdot|a_{ji}|,$$

则称 A 为 Dashnic-Zusmanovich 矩阵,其中 $r_i(A)=\sum_{j\in N\setminus\{i\}}|a_{ij}|$, $N=\{1,2,\cdots,n\}$.

定义 2 设 $A=[a_{ij}]\in C^{n\times n}(n\geqslant 2)$,若 A 无 0 特征值,则称 A 为非奇异的.

定理 1[1] 如果 $A=[a_{ij}]\in C^{n\times n}(n\geqslant 2)$ 为 Dashnic-Zusmanovich 矩阵,则 A 是非奇异的.

定理 2[1] 设 $A=[a_{ij}]\in C^{n\times n}$, $n\geqslant 2$,则

$$\delta(A)\subseteq D(A)=\bigcup_{j\in N,j\neq i}D_{ij}(A),$$

其中

$$D_{ij}\{z\in C:|a_{ii}-z|(|a_{jj}-z|-r_j(A)+|a_{ji}|)\leqslant r_i(A)\cdot|a_{ji}|\}.$$

引理 1[9] 设 $A=[a_{ij}]\in R^{n\times n}$ 为随机矩阵, $D=\mathrm{diag}\{d_1,d_1,\cdots,d_n\}\in R^{n\times n}$ 为任意对角矩阵. 如果 $\mu\in\sigma(A)\setminus\{1\}$,则 μ 是矩阵 $B=A-\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}ee^T$ 的特征值. 因此,如果 B 是非奇异的,则 A 是非奇异的.

2 随机矩阵非奇异的充分条件

本节我们给出随机矩阵非奇异的 2 个充分条件.

定理 3 设 $A=[a_{ij}]\in R^{n\times n}$ 为随机矩阵,若存在 $i\in N$ 使得对任意 $j\in N,j\neq i$,

$$|a_{ii}-M_i|(|a_{jj}-M_j|-M(r_j(A))+M(|a_{ji}|))>M(r_i(A))\cdot M(|a_{ji}|),\tag{1}$$

则 A 是非奇异的,其中

$$M_j=\min_{j\neq k}a_{jk},M(r_i(A))=\sum_{j\in N\setminus\{i\}}|a_{ij}|-(n-1)M_i,M(|a_{ji}|)=|a_{ji}|-M_j.$$

证明 令

$$\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}=\mathrm{diag}\{M_1,M_2,\cdots,M_n\},$$
$$B\triangleq[b_{ij}]=A-\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}ee^T.$$

则

$$b_{ii}=a_{ii}-M_i,b_{ij}=a_{ij}-M_i.$$

因此

$$r_i(B)=\sum_{j\in N\setminus\{i\}}|a_{ij}|-(n-1)M_i=M(r_i(A)),|b_{ji}|=|a_{ji}|-M_j=M(|a_{ji}|).$$

由(1)式得

$$|b_{ii}|(|b_{jj}|-r_j(B)+|b_{ji}|)=|a_{ii}-M_i|(|a_{jj}-M_j|-M(r_j(A))+M(|a_{ji}|))$$
$$>M(r_i(A))\cdot M(|a_{ji}|)=r_i(B)\cdot|b_{ji}|.$$

故 B 为 Dashnic-Zusmanovich 矩阵,由定理 1 知 B 是非奇异. 再由引理 1 知,A 是非奇异的.

定理 4 设 $A=[a_{ij}]\in R^{n\times n}$ 为随机矩阵,若存在 $i\in N$ 使得对任意 $j\in N,j\neq i$,

$$|L_i-a_{ii}|(|L_j-a_{jj}|+L(r_j(A))-L(|a_{ji}|))>L(r_i(A))\cdot L(|a_{ji}|),\tag{2}$$

则 A 是非奇异的,其中

$$L_j=\max_{j\neq k}a_{jk},L(r_i(A))=(n-1)L_i-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|,L(|a_{ji}|)=L_j-|a_{ji}|.$$

证明 令 $\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}=\mathrm{diag}\{L_1,L_2,\cdots,L_n\}$, $B\triangleq[b_{ij}]=\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}ee^T-A$.

则

$$b_{ii}=L_i-a_{ii},b_{ij}=L_i-a_{ij}.$$

因此

$$r_i(B)=(n-1)L_i-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|=L(r_i(A)),|b_{ji}|=L_j-|a_{ji}|=L(|a_{ji}|).$$

由(2)式得

$$|b_{ii}|(|b_{jj}|-r_j(B)+|b_{ji}|)=|L_i-a_{ii}|(|L_j-a_{jj}|-L(r_j(A))+L|a_{ji}|)$$
$$>L(r_i(A))\cdot L(|a_{ji}|)=r_i(B)\cdot|b_{ji}|.$$

故 B 为 Dashnic-Zusmanovich 矩阵,由定理 1 知 B 是非奇异. 再由引理 1 知,A 是非奇异的.

3 随机矩阵非 1 特征值的包含定理

下面我们给出随机矩阵非 1 特征值的 2 个新的包含定理.

定理 5　设 $A=[a_{ij}]\in R^{n\times n}$ 为随机矩阵,$\lambda\in\sigma(A)\setminus\{1\}$,则

$$\lambda\in D^{stoM}(A)=\bigcup_{j\in N,j\neq i}D_{i,j}^{stoM}(A),$$

其中 $$D_{i,j}^{stoM}(A)=\{z:|a_{ii}-z-M_i|(|a_{jj}-z-M_j|-M(r_j(A))+M(|a_{ji}|))\leq M(r_i(A))\cdot M(|a_{ji}|)\}.$$

证明　令 $$B\triangleq[b_{ij}]=A-\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}ee^T,$$

其中 $$\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}=\mathrm{diag}\{M_1,M_2,\cdots,M_n\}.$$

由引理 1 知,对任意的 $\lambda\in\sigma(A)\setminus\{1\}$,有 $\lambda\in\sigma(B)$. 再由定理 2 知,

$$\lambda\in\bigcup_{j\in N,j\neq i}\{z:|b_{ii}-z|(|b_{jj}-z|-r_j(B)+|b_{ji}|)\leqslant r_i(B)\cdot|b_{ji}|\}.$$

又因 $$b_{ii}=a_{ii}-M_i,r_i(B)=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|-(n-1)M_i=M(r_i(A)),$$

$$|b_{ji}|=|a_{ji}|-M_j=M(|a_{ji}|),$$

因此 $$D_{i,j}^{stoM}(A)=\{z:|a_{ii}-z-M_i|(|a_{jj}-z-M_j|-M(r_j(A))+M(|a_{ji}|\leq M(r_i(A)\cdot M(|a_{ji}|)\}$$
$$=\{z:|b_{ii}-z|(|b_{jj}-z|-r_j(B)+|b_{ji}|\leq r_i(B)\cdot|b_{ji}|\}.$$

故 $$\lambda\in D^{stoM}(A)=\bigcup_{j\in N,j\neq i}D_{i,j}^{stoM}(A).$$

定理 6　设 $A=[a_{ij}]\in R^{n\times n}$ 是一个随机矩阵,$\lambda\in\sigma(A)\setminus\{1\}$,则

$$\lambda\in D^{stoM}(A)=\bigcup_{j\in N,j\neq i}D_{i,j}^{stoM}(A),$$

其中 $$D_{i,j}^{stoM}(A)=\{z:|L_i-a_{ii}+z|(|L_j-a_{jj}+z|-L(r_j(A))+L(|a_{ji}|))\leq L(r_i(A))\cdot L(|a_{ji}|)\}.$$

证明　令 $$B\triangleq[b_{ij}]=\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}ee^T-A,$$

其中 $$\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}=\mathrm{diag}\{L_1,L_2,\cdots,L_n\}.$$

由引理 1 知,对任意的 $\lambda\in\sigma(A)\setminus\{1\}$,有 $-\lambda\in\sigma(B)$. 再由定理 2 知,

$$-\lambda\in\bigcup_{j\in N,j\neq i}\{z:|b_{ii}-z|(|b_{jj}-z|-r_j(B)+|b_{ji}|)\leqslant r_i(B)\cdot|b_{ji}|\}.$$

所以 $$\lambda\in\bigcup_{j\in N,j\neq i}\{z:|b_{ii}+z|(|b_{jj}+z|-r_j(B)+|b_{ji}|)\leqslant r_i(B)\cdot|b_{ji}|\}.$$

又因 $$\underset{i\in N}{b_{ii}}=L_i-a_{ii},\ \underset{i\in N\setminus\{j\}}{r_i(B)}=(n-1)L_i-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|=L(r_i(A)),|b_{ji}|=L_j-|a_{ji}|=L(|a_{ji}|),$$

因此 $$D_{i,j}^{stoM}(A)=\{z:|b_{ii}+z(|b_{jj}+z|-r_j(B)+|b_{ji}|)\leq r_j(B)\cdot|b_{ji}|\}$$
$$=\{z:|L_i-a_{ii}+z|(|L_j-a_{jj}+z|+L(r_j(A))-L(|a_{ji}|))\leq L(r_i(A))\cdot L(|a_{ji}|\}.$$

故 $$\lambda\in D^{stoM}(A)=\bigcup_{j\in N,j\neq i}D_{i,j}^{stoL}(A).$$

4　数值例子

本节,我们用几个数值例子对本文所获结果进行解释.

例 1　考虑随机矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0.2057 & 0.4014 & 0.1323 & 0.2606\\ 0.1052 & 0.3320 & 0.2835 & 0.2793\\ 0.4795 & 0.2211 & 0.2132 & 0.0862\\ 0.2083 & 0.3234 & 0.3933 & 0.0750\end{bmatrix}.$$

分别将定理 2 和定理 5 应用于随机矩阵 A,得到 A 的非 1 特征值包含集 $D^{sto}(A)$ 和 $D^{stoM}(A)$,其包含关系如下图 1 所示. 图中星号表示随机矩阵 A 的特征值. 图 1 表明,$D^{stoM}(A)\subset D^{sto}(A)$,因此 $D^{stoM}(A)$ 更精确地定位了随机矩阵 A 的非 1 特征值.

例 2　为了进一步的探讨 $D^{stom}(A)$ 和 $D^{sto}(A)$ 的关系,利用 MATLAB 代码:

$$k=4;A=\mathrm{rand}(k,k);A=\mathrm{inv}(\mathrm{diag}(\mathrm{sum}(A')))^{*}A.$$

随机产生 100 个随机矩阵,考察其对应的非 1 特征值的包含集 $D^{sto}(A)$ 和 $D^{stoM}(A)$ 的关系,发现特征值包含集 $D^{stoM}(A)\subset D^{sto}(A)$ 的个数为 86 个. 特征值包含集 $D^{sto}(A)\not\subset D^{stoM}(A)$ 且 $D^{stoM}(A)\not\subset D^{sto}(A)$ 的个数为 14 个,见表 1.

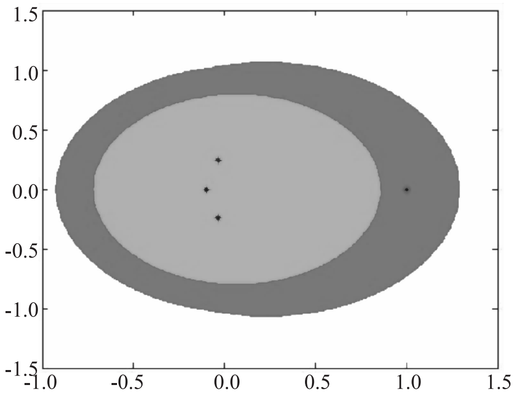

图1 D^{sto}（A）与D^{stoM}（A）比较图

表 1 特征值包含集 $D^{sto}(A)$ 和 $D^{stoM}(A)$ 的比较

$D^{sto}(A)$与 $D^{stoM}(A)$ 的包含情况	$D^{sto}(A)\not\subset D^{stoM}(A)$ $D^{stoM}(A)\not\subset D^{sto}(A)$	$D^{stoM}(A)\subset D^{sto}(A)$
个数	14	86
第 i 个发生	6,8,10,18,26,33,39,42,49,56,70,78,84,97	其他

例 3 考虑下列随机矩阵 A_1 与 A_2：

$$A_1=\begin{bmatrix}0.1733 & 0.3350 & 0.2747 & 0.2170\\ 0.0374 & 0.2568 & 0.3091 & 0.3967\\ 0.0430 & 0.3207 & 0.3390 & 0.2973\\ 0.3581 & 0.0150 & 0.3458 & 0.2811\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}0.3433 & 0.0424 & 0.2530 & 0.3613\\ 0.6529 & 0.2211 & 0.1002 & 0.2580\\ 0.1654 & 0.6446 & 0.1606 & 0.0294\\ 0.2146 & 0.5080 & 0.1876 & 0.0898\end{bmatrix}.$$

定理2 确定的特征值包含集 $D^{sto}(A_1)$与定理6 确定的特征值包含集 $D^{stoL}(A_1)$如下图2 所示,特征值包含集 $D^{sto}(A_2)$和 $D^{stoL}(A_2)$如下图3 所示. 虽然 $D^{sto}(A_1)\not\subset D^{stoL}(A_1)$,$D^{stoL}(A_1)\not\subset D^{sto}(A_1)$,但 $D^{stoL}(A_1)$更精确地包含了随机矩阵 A_1 的所有的不同于 1 的特征值.

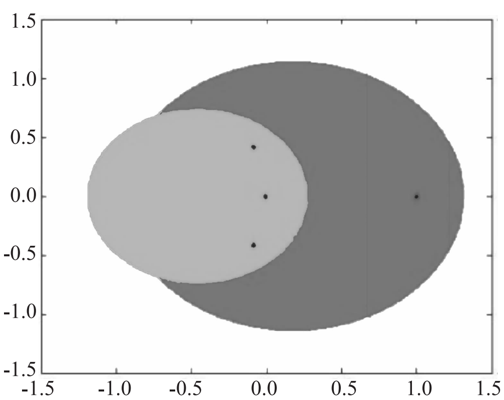

图2 D^{stoL}（A_1）与D^{sto}（A_1）比较图

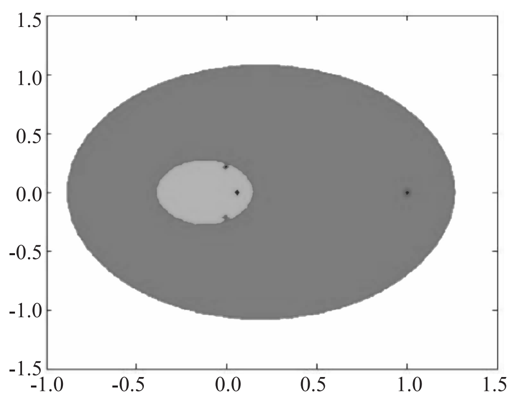

图3 D^{stoL}（A_2）与D^{sto}（A_2）比较图

例 4　考虑随机矩阵

$$A_3=\begin{bmatrix}0.2 & 0.4 & 0.0 & 0.4\\ 0.1 & 0.3 & 0.6 & 0.0\\ 0.0 & 0.2 & 0.7 & 0.1\\ 0.3 & 0.0 & 0.5 & 0.2\end{bmatrix}.$$

对于随机矩阵 A_3,定理 5 中特征值包含集 $D^{stoM}(A_3)$等于定理 2 中的特征值包含集 $D^{sto}(A)$. 定理 6 中特征值包含集 $D^{stoL}(A_3)$与 $D^{sto}(A)$(即 $D^{stoM}(A_3)$)的关系,如图 4 所示.

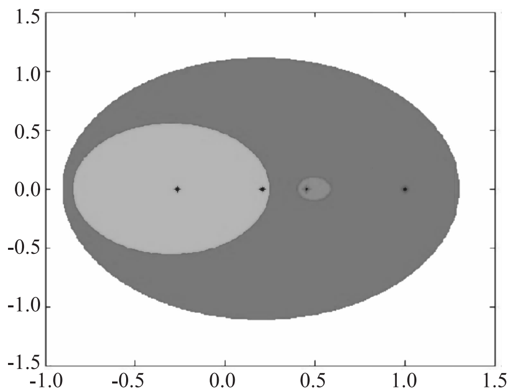

图4　$D^{stoL}(A_3)$与$D^{sto}(A_3)$ 比较图

[参考文献]

[1] LJILJANA C. *H*-matrices theory vs. eigenvalue localization[J]. Numer Algor,2006,42(4):231 - 232.

[2] CVETKPVIC L,KOSTIC V,BRU R,et al. A simple generalization of Gerschgorin's theorem[J]. Advances in Computational Mathematics,2011,35:271 - 280.

[3] LI C Q,LI Y T. Generalization of Brauer's eigenvalue localization theorem[J]. Electronic Journal of Linear Algebra,2011,22:1168 - 1178.

[4] CVETKOVIC L J,KOSTIC V,PENA J M. Eigenvalue localization refinements for matrices related to positivity[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications,2011,32:771 - 773.

[5] SHEN Shu-qian,YU Juan,HUANG Ting-zhu. Some classes of nonsingular matrices with applications to localize the real eigenvalues of real matrices[J]. Linear Algebra and its Applications,2014,447:74 - 81.

[6] PENA J M. Shape preserving representations in computer Aided-geometric design[M]. New York:Nova Science Publishers,1999.

[7] SENETA E. Non-negative matrices and markov chains[M]. New York:Springer-Verlag,1981.

[8] LI Chao-qian,LI Yao-tang. A modification of eigenvalue localization for stochastic matrices[J]. Linear Algebra and its Applications,2014,460:231 - 233.

[9] LI Chao-qian,LIU Qing-bing,LI Yao-tang. Gershgorin-type and Brauer-type eigenvalue localization sets of stochastic matrices[J]. Linear and Multilinear Algebra,2014,63:8 - 10.