昆明学院学报　2012，34(3)：51～54　CN 53－1211/G4　ISSN 1674－5639
Journal of Kunming University

两类有向图的正交因子分解

晏　立[1]，高　炜[2]
（1. 红河学院 工学院，云南 蒙自 661100；2. 云南师范大学 信息学院，云南 昆明 650500）

摘要：研究了两类有向图的正交因子分解问题，得到如下结论：1）设 G 是$(mg+nk,mf-nk)$-有向图，其中 $1\leqslant n<m$，H 是 G 的任意一个有 nk 条边的有向子图，其中 $g\geqslant k\geqslant 1$. 则 G 中存在子图 R，R 具有(g,f)-因子分解 k-正交于 H；2）设 G 是$(0,mf-m+1)$-有向图，则对 G 中任意给定的有向 $2m$-星 $K_{1,2m}$，G 有一个$(0,f)$-因子分解 2-正交于 $K_{1,2m}$.

关键词：有向图；因子；正交；因子分解
中图分类号：O157. 5　**文献标识码**：A　**文章编号**：1674－5639(2012)03－0051－04

Orthogonal Factorization for Two Classes of Digraph

YAN Li[1]，GAO Wei[2]
（1. College of Engineering，Honghe University，Yunnan Mengzi 661100，China；
2. College of Information，Yunnan Normal University，Yunnan Kunming 650500，China）

Abstract：After studying orthogonal factorization for two classes of digraph，the results are：1）Let G be a $(mg+nk,\ mf-nk)$-digraph，where $1\leqslant n<m$. H is a subdigraph of G with nk edges and $g\geqslant k\geqslant 1$，then there is subdigraph R of G，and R has a (g,f)-factorization k-orthogonal to H；2）there exists $(0,f)$-factorization orthogonal to any $2m$-star $K_{1,2m}$ in a $(0,\ mf-m+1)$-digraph.

Key words：digraph；factor；orthogonal；factorization

本文只考虑无环、无平行弧的有限有向图. 设 G 是一个有向图，具有顶点集 $V(G)$ 和边集 $E(G)$. 顶点 x 的入度和出度分别记为 $\deg_G^-(x)$ 和 $\deg_G^+(x)$. $f=(f^-,f^+)$ 和 $g=(g^-,g^+)$ 是定义在 $V(G)$ 上的整数正值函数对，使得对任意 $x\in V(G)$ 都有 $g^-(x)\leqslant f^-(x)$ 和 $g^+(x)\leqslant f^+(x)$. 则有向图 G 的(g,f)-因子是一个有向生成子图 H，且对所有 $x\in V(H)$ 满足：

$$g^-(x)\leqslant \deg_H^-(x)\leqslant f^-(x),g^+(x)\leqslant \deg_H^+(x)\leqslant f^+(x),$$

特别地，G 称为(g,f)-有向图，若它本身是(g,f)-因子. G 的有向子图 H 称为 m-有向子图，若 H 共有 m 条弧. 为方便起见，记 $g\leqslant f$，若对任意 $x\in V(G)$ 都有 $g^-(x)\leqslant f^-(x)$ 和 $g^+(x)\leqslant f^+(x)$；记 $k\leqslant g$，若对任意 $x\in V(G)$ 都有 $k\leqslant \min\{g^-(x),g^+(x)\}$. 有向图 G 的(g,f)-因子分解 $F=\{F_1,F_2,\cdots,F_t\}$ 是将 $E(G)$ 划分成弧不交的(g,f)-因子 $F_1,F_2,\cdots,F_t$. 设 H 是 G 的有向子图，称因子分解 $F=\{F_1,F_2,\cdots,F_t\}$ k-正交于 H，若 $|E(H)\cap E(F_i)|=k$ 对 $1\leqslant i\leqslant m$ 成立. 1-正交即为一般意义下的正交.

Gallai[1] 给出了有向图存在(g,f)-因子的充要条件；Liu[2] 首次研究了有向图的因子分解问题，得到若干基础性的结论；再此基础上. Wang[3] 研究了$(mg+k-1,mf-k+1)$-有向图的正交因子分解问题. 对于无向图而言，文献[4]证明了如下结果：设 k 是一个正整数，G 是一个$(mg+nk,mf-nk)$-图，其中 $1\leqslant n<m$，H 是 G 的任意一个有 nk 条边的子图. 若对每个 $x\in V(G)$ 有 $g\geqslant k$，则 G 中存在子图 R，R 具有(g,f)-因子分解与 k-正交. 文献[5]证明了若 G 是一个$(0,mf-m+1)$-图，则对其中任意给定的 $2m$-星 $K_{1,2m}$，G 有一个$(0,f)$-因子分解 2-正交于 $K_{1,2m}$. 在文献[2～5]的基础上，本文将对$(mg+nk,mf-nk)$-有向图和$(0,mf-m+1)$-有向图的正交因子分解进行研究，得到如下结论：

定理 1　设 k 是一个正整数，G 是一个$(mg+nk,mf-nk)$-有向图，其中 $1\leqslant n<m$，H 是 G 的任意一个有 nk 条边的有向子图，其中 $g\geqslant k\geqslant 1$. 则 G 中存在子图 R，R 具有(g,f)-因子分解 k-正交于 H.

注：增加条件 $k\geqslant 1$，是为了使 g 和 f 都是正值函数，从而使得定理 1 的条件满足下述中的引理 1 的前提条件.

收稿日期：2012－05－26
基金项目：国家自然科学基金资助项目(60903131)；教育部科学技术研究重点资助项目(210210)；民族教育信息化教育部重点实验室资助项目.

作者简介：晏立(1974—)，男，云南个旧人，讲师，硕士，主要从事 P2P 网络、软件工程与图论研究.

定理 2 设 f 是定义在 $(0,mf-m+1)$- 有向图 G 的顶点集 $V(G)$ 上的整数正值函数,则对 G 中任意给定的有向 $2m$- 星 $K_{1,2m}$, G 有一个 $(0,f)$- 因子分解 2- 正交于 $K_{1,2m}$.

1 预备知识

设 $G=(V,E)$ 是一个有向图. S,T 是 $V(G)$ 的两个子集,对于任意 $V(G)$ 上的函数 f,定义 $f(S)=\sum_{x\in S}f(x)$ 且 $f(\phi)=0$. $E_G(S,T)$ 表示一端在顶点子集 T,另一端在顶点子集 S 的边的集合. $e_G(S,T)$ 表示 $E_G(S,T)$ 集合的元素个数. 定义

$$\gamma_{1G}(S,T)=f^{+}(S)-g^{-}(T)+e_G(V-S,T),$$
$$\gamma_{2G}(S,T)=f^{-}(S)-g^{+}(T)+e_G(S,V-T).$$

设 E_1,E_2 是 $E(G)$ 的两个不交子集,定义 $(i=1,2)$

$$E_{iS}=E_i\cap E(S,V-T),E_{iT}=E_i\cap E(V-S,T).$$
$$\alpha_S=|E_{1S}|,\alpha_T=|E_{1T}|,\beta_S=|E_{2S}|,\beta_T=|E_{2T}|.$$

引理 1[2] 设 G 是一个有向图, $f=(f^-,f^+)$ 和 $g=(g^-,g^+)$ 是定义在 $V(G)$ 上的正值整数函数对,使得对任意 $x\in V(G)$ 都有 $g(x)\leqslant f(x)$. E_1,E_2 是 $E(G)$ 的两个不交子集. 则 G 存在 (g,f)- 因子使得 $E_1\subseteq E(F)$, $E_2\cap E(F)=\phi$,当且仅当对所有 $V(G)$ 的子集 S,T 都有 $\gamma_{1G}(S,T)\geqslant\alpha_S+\beta_T$, $\gamma_{2G}(S,T)\geqslant\alpha_T+\beta_S$.

若 G 是一个 $(mg+nk,mf-nk)$- 有向图,对任意 $x\in V(G)$,设

$$p^{-}(x)=\max\{g^{-}(x),\deg_G^{-}(x)-(m-1)f^{-}(x)+(n-1)k\},$$
$$p^{+}(x)=\max\{g^{+}(x),\deg_G^{+}(x)-(m-1)f^{+}(x)+(n-1)k\},$$
$$q^{-}(x)=\min\{f^{-}(x),\deg_G^{-}(x)-(m-1)g^{-}(x)-(n-1)k\},$$
$$q^{+}(x)=\min\{f^{+}(x),\deg_G^{+}(x)-(m-1)g^{+}(x)-(n-1)k\}.$$

类似于文献[2 ~ 4]的讨论,有

$$g^{-}(x)\leqslant p^{-}(x)\leqslant\frac{\deg_G^{-}(x)-k}{m}<\frac{\deg_G^{-}(x)+k}{m}\leqslant q^{-}(x)\leqslant f^{-}(x),\tag{1}$$

$$g^{+}(x)\leqslant p^{+}(x)\leqslant\frac{\deg_G^{+}(x)-k}{m}<\frac{\deg_G^{+}(x)+k}{m}\leqslant q^{+}(x)\leqslant f^{+}(x).\tag{2}$$

对顶点子集 S,T,有

$$\gamma_{1G}(S,T)\geqslant\frac{k(|S|+|T|)}{m}+\frac{m-1}{m}e_G(V-S,T)+\frac{1}{m}e_G(S,V-T),\tag{3}$$

$$\gamma_{2G}(S,T)\geqslant\frac{k(|S|+|T|)}{m}+\frac{m-1}{m}e_G(S,V-T)+\frac{1}{m}e_G(V-S,T).\tag{4}$$

若 G 是一个 $(0,mf-m+1)$- 有向图,设 $V(H)=\{x_0,x_1,\cdots,x_{2m}\}$ 对任意 $x\in V(G)$,设

$$p^{-}(x)=\max\{0,\deg_G^{-}(x)-(m-1)f^{-}(x)+(m-1)-1\},$$
$$p^{+}(x)=\max\{0,\deg_G^{+}(x)-(m-1)f^{+}(x)+(m-1)-1\},$$
$$q^{-}(x)=\min\{f^{-}(x),\deg_G^{-}(x)\},$$
$$q^{+}(x)=\min\{f^{+}(x),\deg_G^{+}(x)\}.$$

则对应 $(0,mf-m+1)$- 有向图的(1) ~ (4)式变为:

$$g^{-}(x)\leqslant p^{-}(x)\leqslant\frac{\deg_G^{-}(x)-1}{m}<\frac{\deg_G^{-}(x)+m-1}{m}\leqslant q^{-}(x)\leqslant f^{-}(x),\tag{5}$$

$$g^{+}(x)\leqslant p^{+}(x)\leqslant\frac{\deg_G^{+}(x)-1}{m}<\frac{\deg_G^{+}(x)+m-1}{m}\leqslant q^{+}(x)\leqslant f^{+}(x),\tag{6}$$

$$\gamma_{1G}(S,T)\geqslant\frac{|T|}{m}+\frac{(m-1)|S|}{m}+\frac{m-1}{m}e_G(V-S,T)+\frac{1}{m}e_G(S,V-T),\tag{7}$$

$$\gamma_{2G}(S,T)\geqslant\frac{|T|}{m}+\frac{(m-1)|S|}{m}+\frac{m-1}{m}e_G(S,V-T)+\frac{1}{m}e_G(V-S,T).\tag{8}$$

2 主要定理的证明

2.1 定理 1 的证明

设 H 是 G 的一个有 nk 条边的有向子图,任取 $E_1\subseteq E(H)$,使得 $|E_1|=k$. 令 $E_2=E(H)\backslash E_1$,则 $|E_2|=$

$(n-1)k$. 要证明定理1,只需要证明 G 存在一个 (p,q)-因子 F,使得 $E_1 \subseteq E(F)$, $E_2 \cap E(F) = \phi$(从而由归纳法可得到定理1). 由引理1. 只需证明对所有子集 S,T 都有

$$\gamma_{1G}(S,T) \geqslant \alpha_S + \beta_T, \tag{9}$$

$$\gamma_{2G}(S,T) \geqslant \alpha_T + \beta_S. \tag{10}$$

下面只证明(9)成立,由类似的方法可证明(10)成立. 当 $k=1$ 时,结论包含在文献[3]的主要结论中. 下面设 $k \geqslant 2$.

由上面的分析可知,对任意 $x \in V(G)$,

$$\deg_G^-(x) \geqslant mg^- + nk \geqslant mk + nk \geqslant mk,$$

$$\deg_G^+(x) \geqslant mg^+ + nk \geqslant mk + nk \geqslant mk,$$

$$\alpha_S \leqslant \min\{2k,\ k|S|\},$$

$$\beta_T \leqslant \min\{2(n-1)k,\ (n-1)k|T|\},$$

若 $T = \phi$,显然有 $\gamma_{1G}(S,T) \geqslant \alpha_S + \beta_T$,从而以下均假设 T 都不为空,分3种情况讨论.

情况1　$|S| = 0$. 此时有 $\alpha_S = 0$,从而 $\gamma_{1G}(S,T) \geqslant \frac{m-1}{m} e_G(V-S,T) \geqslant (m-1)k|T| \geqslant \beta_T = \alpha_S + \beta_T$.

情况2　$1 \leqslant |S| \leqslant k$.

在此情况下有

$$e_G(V-S,T) \geqslant (mk+nk-|S|)|T| \geqslant mk|T|,\ e_G(S,V-T) + |T| \geqslant mk+nk.$$

从而

$$\begin{aligned}\gamma_{1G}(S,T) &\geqslant \frac{k(|S|+|T|)}{m} + \frac{m-1}{m}e_G(V-S,T) + \frac{1}{m}e_G(S,V-T)\\ &\geqslant \frac{k|S|}{m} + \frac{(k-1)|T|}{m} + \frac{mk+nk}{m} + (m-1)k|T|\\ &> k + (m-1)k|T| = 2k + (n-1)k|T|\\ &\geqslant \alpha_S + \beta_T.\end{aligned}$$

情况3　$|S| \geqslant k$.

在此情况下有

$$e_G(S,V-T) + k(|S|+|T|) \geqslant (mk+nk-|T|)k + k^2 + k|T| = (m+n+1)k^2.$$

从而

$$\begin{aligned}\gamma_{1G}(S,T) &\geqslant \frac{k(|S|+|T|)}{m} + \frac{m-1}{m}e_G(V-S,T) + \frac{1}{m}e_G(S,V-T)\\ &\geqslant k^2 + \frac{(n+1)k^2}{m} + \frac{m-1}{m}\beta_T\\ &\geqslant 2k + \frac{2(n+1)k}{m} - \frac{2(n-1)k}{m} + \beta_T\\ &\geqslant \alpha_S + \beta_T.\end{aligned}$$

综上所述,定理1成立.

2.2　定理2的证明

H, E_1, E_2 的含义与定理1证明中类似,$|E_1| = 2$. 类似地,只需证明 G 存在一个 (p,q)-因子 F,使得 $E_1 \subseteq E(F)$, $E_2 \cap E(F) = \phi$(从而由归纳法可得到定理2). 并且只需证明(5)式对应 $(0, mf-m+1)$-有向图也成立. 当 $m=1$ 时,结论又包含在文献[3]的主要结论中. 下面设 $m \geqslant 2$.

若 $T = \phi$,显然有 $\gamma_{1G}(S,T) \geqslant \alpha_S + \beta_T$,从而以下均假设 T 都不为空,分3种情况讨论.

情况1　$x_0 \in S$. 此时有 $\alpha_S \leqslant 4$, $\beta_T = 0$,从而

$$\begin{aligned}\gamma_{1G}(S,T) &\geqslant \frac{|T|}{m} + \frac{(m-1)|S|}{m} + \frac{m-1}{m}e_G(V-S,T) + \frac{1}{m}e_G(S,V-T)\\ &\geqslant \frac{(m-1)|S|}{m} + \frac{1}{m}[e_G(S,V-T) + |T|]\\ &\geqslant \alpha_S = \alpha_S + \beta_T.\end{aligned}$$

情况 2 $x_0 \notin S, x_0 \notin T$.

在此情况下，$\alpha_S \leqslant |S|, \beta_T \leqslant |T|$. 因此可直接验证

$$\gamma_{1G}(S,T) \geqslant \frac{|T|}{m} + \frac{(m-1)|S|}{m} + \frac{m-1}{m}e_G(V-S,T) + \frac{1}{m}e_G(S,V-T) \geqslant \alpha_S + \beta_T.$$

情况 3 $x_0 \in T$.

在此情况下，$\alpha_S = 0, \beta_T \leqslant \min\{|E'_2| + 2(m-1), |T| + 2(m-1)\}$.

1）若 $|S| \geqslant 2$. 则

$$\begin{aligned}\gamma_{1G}(S,T) &\geqslant \frac{|T|}{m} + \frac{(m-1)|S|}{m} + \frac{m-1}{m}e_G(V-S,T) + \frac{1}{m}e_G(S,V-T) \\ &\geqslant \frac{|T| + 2(m-1)}{m} + \frac{m-1}{m}\beta_T \geqslant \frac{1}{m}\beta_T + \frac{m-1}{m}\beta_T \\ &= \beta_T = \alpha_S + \beta_T.\end{aligned}$$

2）若 $|S| = 1$. 则有

$$\begin{aligned}\gamma_{1G}(S,T) &\geqslant \frac{|T|}{m} + \frac{(m-1)|S|}{m} + \frac{m-1}{m}e_G(V-S,T) + \frac{1}{m}e_G(S,V-T) \\ &\geqslant \frac{|E'_2| + 1}{m} + \frac{m-1}{m} + \frac{m-1}{m}(|E'_2| + 2m - 1) \\ &\geqslant |E'_2| + 2(m-1) \\ &\geqslant \beta_T = \alpha_S + \beta_T.\end{aligned}$$

3）若 $|S| = 0$. 则有

$$\gamma_{1G}(S,T) \geqslant \frac{|T|}{m} + \frac{m-1}{m}e_G(V-S,T) \geqslant \frac{|E'_2|+1}{m} + \frac{m-1}{m}(|E'_2| + 2m) > |E'_2| + 2(m-1) \geqslant \beta_T = \alpha_S + \beta_T.$$

综上所述，定理 2 成立.

［参考文献］

[1] GALLAI T. Maximum-minimum satze and verallgemeinerte factoren von graphen[J]. Acta Math Acad Sci Hungar, 1961, 12: 131 – 173.
[2] LIU G. Orthogonal factorizations of digraphs[J]. Front Math China, 2009, 4: 311 – 323.
[3] WANG C. Subdigraphs with orthogonal factorizations of digraphs[J]. European Journal of Combinatorics, 2012, 33: 1015 – 1021.
[4] 周思中，薛秀谦. 具有 (n,k)-正交的 (g,f)-因子分解的子图[J]. 华东船舶工业学院学报：自然科学版，2003，17(6)：27 – 30.
[5] 于卿枝，黄昌华，廖大庆. 与星 2-正交的 $(0,f)$-因子分解[J]. 数学的实践与认识，2009，39(19)：193 – 196.