

控制变换尾下 END 序列随机和的广义精致大偏差

胡怡玉,何基娇,周之寒
(安徽大学 数学科学学院,安徽 合肥 230601)

摘要:重尾场合下随机变量随机和的精致大偏差是现代金融保险学中一项重要研究课题.假定理赔序列为一列 END 同分布随机变量序列,带控制变换尾,理赔到来过程为一般计数过程,且与理赔序列相互独立,在更弱的条件下,将文献[5]中所做的一致变换尾上的广义精致大偏差推广到控制变换尾上,得到相应的偏离均值的大偏差结果.

关键词:广义精致大偏差;END;随机和;控制变换尾;重尾分布

中图分类号:O211.5 文献标识码:A 文章编号:1674-5639(2014)06-0058-04

Extended Precise Large Deviations of Random Sums in the Presence of Dominated Variation END Structure

HU Yi-yu, HE Ji-jiao, ZHOU Zhi-han

(College of Mathematic Science, Anhui University, Anhui Hefei 230601, China)

Abstract: The precise large deviations of random sums in heavy-tailed random variables is an important research topic in modern insurance and finance. Let the claims be a sequence of END real-valued identically distributed random variables with dominated variation, the claims is common counting process and independent from its sequence. Under the weaker condition, the extended precise large deviations of random sums which had been done in the document[5] was promoted to dominated variation, the largest deviation of consequential deflection mean is acquired.

Key words: extended precise large deviation; END; sums of random variables; dominated variation; heavy-tailed distribution

设 $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ 是一列实值同分布(不一定独立)随机变量序列,其共同分布函数为 $F(x) = 1 - \bar{F}(x) = P(X_1 < x)$,数学期望 $\mu < \infty$,在保险精算学中, $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ 表示理赔额.再令 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为任一非负整值计数过程,与理赔序列相互独立, $\{N(t), t \geq 0\}$ 表示到 t 时刻为止索赔发生的次数,其均值函数为 $EN(t) = \lambda(t)$,且当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\lambda(t) \rightarrow \infty$.对于任意的 $t > 0$,定义随机和

$$S_{N(t)} = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \quad (1)$$

则 $S_{N(t)}$ 表示到 t 时刻为止公司的累积理赔额.鉴于 $S_{N(t)}$ 的尾概率性态可以用于估计公司的破产概率,对公司的风险管理发挥着举足轻重的作用,因此,近年来该问题已成为现代保险精算学的一项重要研究课题.另一方面,重尾分布(指数阶矩不存在)由于能够刻画极端理赔这一特性,近年来同样受到了广泛的关注.在重尾场合下, Klüppelberg 等^[1]和 Tang 等^[2]较早地研究了理赔序列随机和的精致大偏差.随后, Liu^[3]得到了一致变换尾分布下 END 序列的确定和的精致大偏差, Chen 等^[4]将 Liu^[3]的结果推广到随机和情形.最近 Wang 等^[5]首先提出了偏离均值的广义精致大偏差的概念,继而得到了一致变换尾下理赔序列随机和的广义精致大偏差.

本文在上述文献的基础上,假设 $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ 为一列 END 随机变量序列, F 带控制变换尾.文献[5]等做了一致变换尾上的广义精致大偏差,而本文在更弱的条件下,将其推广到了控制变换尾上,得到了相应的偏离均值的大偏差结果.

1 定义和引理

本文采用记号如下:对于两个正无穷小函数 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$,满足

$$a \leq \liminf \frac{f(\cdot)}{g(\cdot)} \leq \limsup \frac{f(\cdot)}{g(\cdot)} \leq b,$$

若 $b < \infty$,记 $f(\cdot) = O(g(\cdot))$;若 $b = 0$,记 $f(\cdot) = o(g(\cdot))$;若 $b = 1$,记 $f(\cdot) \leq g(\cdot)$;若 $a = 1$, $f(\cdot) \geq g(\cdot)$;若 $a = b = 1$,则记 $f(\cdot) \sim g(\cdot)$;若 $0 < a \leq b < \infty$,则记 $f(\cdot) \asymp g(\cdot)$.

定义 1^[3] $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ 为 END(Extended Negatively Dependent) 随机变量序列,是指存在常数 $M > 0$,使得对任意的 $n = 1, 2, \dots$,和 x_1, \dots, x_n 有

收稿日期:2014-09-12

基金项目:安徽大学科研训练计划资助项目(KYXL2014008).

作者简介:胡怡玉(1990—),女,安徽安庆人,在读硕士,主要从事寿险精算和金融数学研究.

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \leq M \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x_i), \tag{2}$$

$$P(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n) \leq M \prod_{i=1}^n P(X_i > x_i). \tag{3}$$

定义 2^[6] F 是支撑在 $[0, \infty)$ 上的分布函数(或其对应的随机变量),如果对任意的 $0 < y < 1$ (或存在 $0 < y < 1$),使

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} < \infty,$$

则称 F 属于控制变换尾族,记作 $F \in D$.

如果 F 是支撑在 $(-\infty, \infty)$ 上的分布函数,且 $F^+(x) = F(x)1_{|x \geq 0|} \in D$,则也称 F 属于控制变换尾族,也记作 $F \in D$.

以下对任意 $y \geq 0$,记 $\rho_F(y) = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)}$;再记 $J_F^+ = \inf\{-\frac{\log \bar{F}_*(y)}{\log y}, y > 1\}$, $L_F = \lim_{y \downarrow 1} \bar{F}_*(y)$,其中 $\bar{F}_*(y) = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)}$.由 Tang 和 Tsitsiashvili^[7] 的研究可知, J_F^+ 称为分布函数 F 的上 Matuszewska 指数,且 $F \in D$ 时, $J_F^+ < \infty$;对任意的 $p > J_F^+$,

$$x^{-p} = o(\bar{F}(x)), x \rightarrow \infty. \tag{4}$$

引理 1^[4] 设 $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ 是一列实值 END 随机变量序列,其共同分布为 F . 如果 $0 < \mu_+ = EX_1 1_{|X_1 \geq 0|} < \infty$,则对任意给定的 $\nu > 0$,存在 $C = C(\nu)$,使得对任何 $n = 1, 2, \dots$ 和 $x > 0$ 有

$$P(S_n > x) \leq n\bar{F}\left(\frac{x}{\nu}\right) + C\left(\frac{n}{x}\right)^\nu. \tag{5}$$

引理 2^[8] 设 $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ 是一列实值 END 随机变量序列,其共同分布 $F \in D$,期望 $\mu < \infty$,如果 $\exists r > 1$,使得 $E|X_1|^r 1_{|X_1 \leq 0|} < \infty$;且 $F(-x) = o(\bar{F}(x)), x \rightarrow \infty$.

则对任意给定的 $\gamma > 0$,

$$\rho_F(|\mu|)L_F \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{x \geq n\mu} \frac{P(S_n - n\mu > x)}{n\bar{F}(x)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq n\mu} \frac{P(S_n - n\mu > x)}{n\bar{F}(x)} \leq M_{F,\mu} L_F^{-1}, \tag{7}$$

其中

$$M_{F,\mu} = 1_{|\mu \geq 0|} + \rho_F^{-2}(|\mu|)1_{|\mu < 0|}.$$

2 主要结果及证明

条件 1 对任意的 $\delta > 0$,存在 $p > J_F^+$,

$$EN^p(t)1_{|N(t) > (1+\delta)\lambda(t)} = O(\lambda(t)). \tag{8}$$

条件 2 对所有的 $0 < \delta < 1$,

$$P(N(t) \leq (1 - \delta)\lambda(t)) = o(\lambda(t)\bar{F}(\lambda(t))). \tag{9}$$

注:条件 1 是成立的,具体见参考文献[2]中更新计数过程引理 3.5 的证明.条件 2 首次在参考文献[4]中被引用.并且由条件 1 或条件 2 很容易能得到参考文献[6]和[4]中的大数定律.

定理 1 设 $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ 是一列实值 END 随机变量序列,其共同分布 $F \in D$,期望 $\mu < \infty$,且满足(6).再设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一与 $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ 相互独立的非负整值计数过程. m 是任一给定实数,则对任意的 $\gamma > (\mu - m) \vee 0, 1$ 当 $\mu \geq 0$ 时,条件 1 成立;或者 2) 当 $\mu < 0$ 时,条件 2 成立,总有

$$\begin{aligned} \rho_F(|\mu|)L_F^2 &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{x \geq \gamma\lambda(t)} \frac{P(S_{N(t)} - m\lambda(t) > x)}{\lambda(t)\bar{F}(x + (m - \mu)\lambda(t))} \leq \\ &\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \geq \gamma\lambda(t)} \frac{P(S_{N(t)} - m\lambda(t) > x)}{\lambda(t)\bar{F}(x + (m - \mu)\lambda(t))} \leq M_{F,\mu} L_F^{-2}. \end{aligned} \tag{10}$$

注:在定理 1 中,若取 $m = \mu$,则定理 1 退化为文献[8]中结果;特别地,如果再令 $F \in C$ (C 族的定义请参考文献[6]),此时注意到 $\rho_F = M_{F,\mu} \equiv 1$,于是由定理 1 得到文献[5]中的结论.

证明 以下证明过程中所有极限过程均指 $t \rightarrow \infty$,且对 $x \geq \gamma\lambda(t)$ 一致.证明过程分 1) $\mu \geq 0$ 和 2) $\mu < 0$ 两种情形分别加以讨论.

1) 当 $\mu \geq 0$ 时.选取充分小的 $0 < \delta < 1$,使得 $\frac{\gamma + m}{1 + \delta} - \mu > 0$.

$$\begin{aligned} P(S_{N(t)} - m\lambda(t) > x) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n - n\mu > x + m\lambda(t) - n\mu)P(N(t) = n) = \\ &\left(\sum_{n < (1-\delta)\lambda(t)} + \sum_{(1-\delta)\lambda(t) \leq n \leq (1+\delta)\lambda(t)} + \sum_{n > (1+\delta)\lambda(t)} \right) = I_1(x, t) + I_2(x, t) + I_3(x, t). \end{aligned} \tag{11}$$

首先考虑 $I_1(x, t)$,注意到 $x + m\lambda(t) - n\mu \geq (\frac{\gamma + m}{1 + \delta} - \mu)n$,故由引理 2 得

$$\begin{aligned}
I_1(x, t) &\leq \sum_{n < (1-\delta)\lambda(t)} L_F^{-1} n \bar{F}(x + m\lambda(t) - n\mu) P(N(t) = n) \\
&\leq (1-\delta)\lambda(t) L_F^{-1} \bar{F}(x + m\lambda(t) - (1-\delta)\mu\lambda(t)) P(N(t) < (1-\delta)\lambda(t)) \\
&\leq o(\lambda(t) \bar{F}(x + (m-\mu)\lambda(t))). \tag{12}
\end{aligned}$$

对于 $I_2(x, t)$, 同理, 由于 $x + m\lambda(t) - n\mu \geq (\frac{\gamma+m}{1+\delta} - \mu)n$, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 由引理 2 得

$$\begin{aligned}
I_2(x, t) &\leq \sum_{(1-\delta)\lambda(t) \leq n \leq (1+\delta)\lambda(t)} (1+\varepsilon) L_F^{-1} n \bar{F}(x + m\lambda(t) - n\mu) P(N(t) = n) \\
&\leq (1+\delta)\lambda(t) (1+\varepsilon) L_F^{-1} \bar{F}(x + m\lambda(t) - \mu(1+\delta)\lambda(t)) P(|\frac{N(t)}{\lambda(t)} - 1| < \delta) \\
&\leq (1+\delta)\lambda(t) (1+\varepsilon)^2 L_F^{-1} \bar{F}((1 - \frac{\delta\mu}{\gamma+m-\mu})(x + (m-\mu)\lambda(t))), \tag{13}
\end{aligned}$$

$$\text{以及 } I_2(x, t) \geq (1-\varepsilon)^2 \rho_F(\mu) L_F (1-\delta)\lambda(t) \bar{F}((1 + \frac{\delta\mu}{\gamma+m-\mu})(x + (m-\mu)\lambda(t))). \tag{14}$$

最后考虑 $I_3(x, t)$: (1) $m \geq 0$ 时, 利用引理 1, 取 $\nu = p$, 故存在常数 $C_1 > 0$, 使得

$$I_3(x, t) \leq \sum_{n > (1+\delta)\lambda(t)} P(S_n > x) P(N(t) = n) \leq \sum_{n > (1+\delta)\lambda(t)} (n \bar{F}(\frac{x}{p}) + C_1 (\frac{n}{x})^p) P(N(t) = n). \tag{15}$$

当 $m < 0$ 时, 因为 $\gamma > \mu - m \geq -m > 0$, 所以 $1 + \frac{m}{\gamma} > 0$, 类似(15)式, 再次利用引理 1, 故存在常数 $C_2 > 0$, 使得

$$\begin{aligned}
I_3(x, t) &\leq \sum_{n > (1+\delta)\lambda(t)} P(S_n > (1 + \frac{m}{\gamma})x) P(N(t) = n) \\
&\leq \sum_{n > (1+\delta)\lambda(t)} (n \bar{F}(\frac{(1 + \frac{m}{\gamma})x}{p}) + C_2 (\frac{n}{(1 + \frac{m}{\gamma})x})^p) P(N(t) = n). \tag{16}
\end{aligned}$$

故由(4)式、条件 1、(15)式和(16)式可得

$$I_3(x, t) \leq O(1) \bar{F}(x) EN(t) \mathbf{1}_{(N(t) > (1+\delta)\lambda(t))} + x^{-p} EN^p(t) \mathbf{1}_{(N(t) > (1+\delta)\lambda(t))} \leq o(\bar{F}(x)\lambda(t)).$$

又由于 $\bar{F}(x + (m-\mu)\lambda(t)) \geq \bar{F}((1 + \frac{|m-\mu|}{\gamma})x) \asymp \bar{F}(x)$.

$$\text{此即 } I_3(x, t) \leq o(\lambda(t) \bar{F}(x + (m-\mu)\lambda(t))). \tag{17}$$

将(12), (13), (14), (17)式代入到(11)式中, 并令 $\varepsilon \downarrow 0, \delta \downarrow 0$, 由 L_F 的定义可得

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \geq \gamma\lambda(t)} \frac{P(S_{N(t)} - m\lambda(t) > x)}{\lambda(t) \bar{F}(x + (m-\mu)\lambda(t))} \\
&\leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \geq \gamma\lambda(t)} \frac{(1+\delta)\lambda(t) (1+\varepsilon)^2 L_F^{-1} \bar{F}((1 - \frac{\delta\mu}{\gamma+m-\mu})(x + (m-\mu)\lambda(t)))}{\lambda(t) \bar{F}(x + (m-\mu)\lambda(t))} \\
&\leq L_F^{-1} \lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}((1 - \frac{\delta\mu}{\gamma+m-\mu})(x + (m-\mu)\lambda(t)))}{\bar{F}(x + (m-\mu)\lambda(t))} \\
&= L_F^{-2}, \tag{18}
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{x \geq \gamma\lambda(t)} \frac{P(S_{N(t)} - m\lambda(t) > x)}{\lambda(t) \bar{F}(x + (m-\mu)\lambda(t))} \\
&\geq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{\delta \downarrow 0} \liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{x \geq \gamma\lambda(t)} \frac{(1-\delta)\lambda(t) (1-\varepsilon)^2 \rho_F(\mu) L_F \bar{F}((1 + \frac{\delta\mu}{\gamma+m-\mu})(x + (m-\mu)\lambda(t)))}{\lambda(t) \bar{F}(x + (m-\mu)\lambda(t))} \\
&\geq \rho_F(\mu) L_F \lim_{\delta \downarrow 0} \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}((1 + \frac{\delta\mu}{\gamma+m-\mu})(x + (m-\mu)\lambda(t)))}{\bar{F}(x + (m-\mu)\lambda(t))} = \rho_F(\mu) L_F^2. \tag{19}
\end{aligned}$$

于是, (18)式和(19)式表明, 定理 1 的 1) 成立.

2) 当 $\mu < 0$ 时. 注意到如果 $m \geq 0$, 则 $\gamma > (\mu - m) \vee 0$ 等价于 $\gamma > -m \vee 0$; 而当 $m < 0$ 时, $\gamma > (\mu - m) \vee 0$ 可分为 (a) $\gamma > -m \vee 0$; (b) $\gamma \in (\mu - m \vee 0, -m]$ 两部分. 综合一下, 以下证明过程分 (a) (不论 $m \geq 0$ 与 $m < 0$) 以及 (b) 两种情形分别加以讨论.

(a) $\gamma > -m \vee 0$, 选取充分小 $0 < \delta < 1$, 使得 $\frac{\gamma+m}{1+\delta} - \mu > 0$. 首先考虑 $I_1(x, t)$, 注意到 $x + m\lambda(t) - n\mu \geq$

$(\frac{\gamma+m}{1+\delta} - \mu)n$, 故由引理 2 得

$$I_1(x, t) \leq \sum_{n < (1-\delta)\lambda(t)} \rho_F^{-2}(-\mu) L_F^{-1} n \bar{F}(x + m\lambda(t) - n\mu) P(N(t) = n) \\ \leq \rho_F^{-2}(-\mu) L_F^{-1} (1 - \delta) \lambda(t) \bar{F}(x + m\lambda(t)) P(N(t) < (1 - \delta) \lambda(t)),$$

其中,当 $m < 0$ 时,由于

$$\bar{F}(x + m\lambda(t)) \leq \bar{F}\left(\left(1 + \frac{m}{\gamma}\right)x\right) \asymp \bar{F}(x), \\ \bar{F}(x + (m - \mu)\lambda(t)) \geq \bar{F}\left(\left(1 + \frac{|m - \mu|}{\gamma}\right)x\right) \asymp \bar{F}(x), \tag{20}$$

即
$$I_1(x, t) \leq o(\lambda(t) \bar{F}(x + (m - \mu)\lambda(t))). \tag{21}$$

当 $m \geq 0$ 时,类似(20)式可得

$$\bar{F}(x + m\lambda(t)) \leq \bar{F}(x).$$

因此,(21)式亦成立. 对于 $I_2(x, t)$, 由于 $x + m\lambda(t) - n\mu \geq \left(\frac{\gamma + m}{1 + \delta} - \mu\right)n$, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 类似于 1) 中 $I_2(x, t)$ 可证得

$$I_2(x, t) \leq (1 + \delta) \lambda(t) (1 + \varepsilon)^2 \rho_F^{-2}(-\mu) L_F^{-1} \bar{F}\left(\left(1 + \frac{\delta\mu}{\gamma + m - \mu}\right)(x + (m - \mu)\lambda(t))\right), \tag{22}$$

以及
$$I_2(x, t) \geq (1 - \delta) \lambda(t) (1 - \varepsilon)^2 \rho_F^{-2}(-\mu) L_F^{-1} \bar{F}\left(\left(1 - \frac{\delta\mu}{\gamma + m - \mu}\right)(x + (m - \mu)\lambda(t))\right). \tag{23}$$

最后考虑 $I_3(x, t)$, 由于 $x + m\lambda(t) - n\mu \geq (\gamma + m)\lambda(t) + n|\mu|$, 故由引理 2 得

$$I_3(x, t) \leq \sum_{n > (1+\delta)\lambda(t)} (1 + \varepsilon) \rho_F^{-2}(-\mu) L_F^{-1} n \bar{F}(x + m\lambda(t) - n\mu) P(N(t) = n) \\ \leq (1 + \varepsilon) \rho_F^{-2}(-\mu) L_F^{-1} \bar{F}(x + m\lambda(t) - \mu(1 + \delta)\lambda(t)) \sum_{n > (1+\delta)\lambda(t)} n P(N(t) = n) \\ \leq o(\lambda(t) \bar{F}(x + (m - \mu)\lambda(t))). \tag{24}$$

将(21) ~ (24)式代入(11)式,并令 $\varepsilon \downarrow 0, \delta \downarrow 0$, 由 L_F 的定义同理可得(18), (19)式成立.

(b) $\gamma \in (\mu - m \vee 0, -m]$, 选取充分小 $0 < \delta < 1$, 使得 $\frac{\gamma + m}{1 - \delta} - \mu > 0$. 对于 $I_i(x, t), i = 2, 3$, 由于 $x + m\lambda(t) - n\mu \geq \left(\frac{\gamma + m}{1 - \delta} - \mu\right)n$. 故类似 2) 中(a)的证明过程可得(22), (23), (24)式亦成立. 最后只需考虑 $I_1(x, t)$, 此时选取任意的 $\gamma_1 > -m \vee 0$, 将 x 所在的区间划分如下为两部分:

$$[\gamma\lambda(t), \infty) = [\gamma_1\lambda(t), \infty) \cup [\gamma\lambda(t), \gamma_1\lambda(t)).$$

对于第 1 部分 $x \geq \gamma_1\lambda(t)$, 注意到 $x + m\lambda(t) - n\mu > |\mu|n$. 由 2) (a) 中已证结论可知(21)式成立. 对于第 2 部分 $\gamma\lambda(t) \leq x < \gamma_1\lambda(t)$, 因为

$$\bar{F}(x) \geq \bar{F}(\gamma\lambda(t)) \asymp \bar{F}(\lambda(t)), \\ \bar{F}(x + (m - \mu)\lambda(t)) \geq \bar{F}\left(\left(1 + \frac{|m - \mu|}{\gamma_1}\right)x\right) \asymp \bar{F}(x).$$

故由条件 2 可得

$$I_1(x, t) \leq P(N(t) \leq (1 - \delta)\lambda(t)) = o(1)\lambda(t)\bar{F}(\lambda(t)) \leq o(\lambda(t)\bar{F}(x + (m - \mu)\lambda(t))).$$

此即,对于所有的 $x \geq \gamma\lambda(t)$,

$$I_1(x, t) \leq o(\lambda(t)\bar{F}(x + (m - \mu)\lambda(t))). \tag{25}$$

最后将(22) ~ (25)式代入到(11)式中,并令 $\varepsilon \downarrow 0, \delta \downarrow 0$, 由 L_F 的定义亦可得(18), (19)式成立, 定理 1 证毕.

[参考文献]

[1] KLÜPPLBERG C, MIKOSCH T. Large deviations of heavy-tailed random sums with applications in insurance and finance[J]. Appl Prob, 1997, 34(2): 293 - 308.
 [2] TANG Q, SU C, JIANG T, et al. Large deviations for heavy-tailed random sums in compound renewal model[J]. Stat Prob Lett, 2001, 52(1): 91 - 100.
 [3] LIU L. Precise large deviations for dependent random variables with heavy tails[J]. Stat Prob Lett, 2009, 79(9): 1290 - 1298.
 [4] CHEN Y, YUEN K C, NG K W. Precise large deviations of random sums in the presence of negatively dependence and consistent variation[J]. Method Comput Appl Prob, 2011, 13(4): 821 - 833.
 [5] WANG S, WANG W. Extend precise large deviations of random sums in the presence of END structure and consistent variation[J]. Appl Math, 2012, 10: 1155 - 1167.
 [6] NG K W, TANG Q, YAN J, et al. Precise large deviations for sums of random variables with consistently varying tails[J]. Appl Prob, 2004, 41(1): 93 - 107.
 [7] TANG Q, Tsitsiashvili G. Precise estimates for the ruin probability in finite horizon in a discrete-time model with heavy-tailed insurance and financial risks[J]. Stoch Proc Appl, 2003, 108(2): 299 - 325.
 [8] WANG S, WANG X, WANG W. Precise large deviations of aggregate claims with dominated variation in dependent multi-risk models[J]. Abstr Appl Anal, 2014, 10: 1155 - 1164.