昆明学院学报　2019，41（3）：82～84　ISSN 1674－5639　CN 53－1211/G4
Journal of Kunming University

关于拟线性退缩抛物方程解的一个结论

刘建明[1,2,3]

（1．泉州师范学院 数学与计算机科学学院，福建 泉州 362000；
2．智能计算与信息处理福建省高等学校重点实验室，福建 泉州 362000；
3．数字福建智能创造大数据研究所，福建 泉州 362000）

摘要：探讨带非线性源项的拟线性退缩抛物方程的 Cauchy 问题在半空间 $S=R^N\times(0,+\infty)$上的临界 Blow-up 现象，得到了方程没有非平凡非负整体（定义在整个半空间 S 上）解的条件，且得到的结论是 Liouville型的．此外，研究所采用的方法可用于探讨类似的拟线性椭圆和抛物方程．

关键词：Cauchy 问题；Blow-up；拟线性退缩；抛物方程

中图分类号：O175　**文献标识码**：A　**文章编号**：1674－5639（2019）03－0082－03

DOI：10.14091/j.cnki.kmxyxb.2019.03.017

A Conclusion on the Solutions of Quasilinear Degenerate Parabolic Equations

LIU Jianming[1,2,3]

（1．College of Mathematics and Computer Science，Quanzhou Normal University，Quanzhou，Fujian，China　362000；
2．Key Laboratory of Intelligent Computing and Information Processing，Quanzhou，Fujian，China　362000；
3．Fujian Provincial Big Data Research Institute of Intelligent Manufacturing，Quanzhou，Fujian，China　362000）

Abstract：To study the critical blow-up phenomena of the Cauchy problem for the quasilinear degenerate parabolic equations with nonlinear sources on the half-space $S=R^N\times(0,+\infty)$，we obtained the nonexistence of nontrivial nonnegative global (defined on the whole half-space) solution to the equation. The results obtained in the paper are the type of Liouville，and the approach developed herein is directly applicable to the study of analogous problems for systems of quasilinear elliptic and parabolic equations.

Key words：Cauchy problem；Blow-up；quasilinear degenerate；parabolic equations

本文研究下列拟线性退缩抛物方程的 Cauchy 问题在半空间 $S=R^N\times(0,+\infty)$上的临界 Blow-up 现象：

$$u_t=\Delta[(|u|^{m-1}u)]+|u|^{q-1}u, \tag{1}$$

其中 $q>1, m\geqslant 1, (x,t)\in S=R^N\times(0,+\infty), N\geqslant 1$.

方程（1）是热方程的非线性变形，它来源于某些科学领域的数学模型，如多孔介质中气体或液体的流动[1]和某些生物种群的传播[2]．在不考虑超平面 $t=0$ 上的初始迹的情况下，我们得到了对任意固定的 $q\in(m,m+2/N]$，方程（1）没有非平凡非负整体（定义在整个半空间 S 上）解．虽然这个结果已经被某些研究者得到($1<q<m+2/N$ 的情形参见文献［3］，$q=m+2/N$ 的情形参见文献［4］)，但在本文中我们采用了一个有效的分析技巧，使得证明过程比上述文献中的证明简单得多．而当 $m=1$ 时，类似问题的研究见文献［5］.

1　主要结论

首先定义方程（1）的解.

定义 1　称函数 $u(x,t)$为方程（1）在 S 上的一个解，如果：

收稿日期：2018－06－12

基金项目：福建省中青年教师教育科研资助项目（JAT160410）.

作者简介：刘建明（1982—），男，福建惠安人，讲师，硕士，主要从事计算数学和微分方程研究.

1) $u \in L^q_{loc}(S)$;

2) $\int_s (-|u|\varphi_t - |u|^{m-1}u\Delta\varphi - |u|^{q-1}u\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(S), \varphi \geqslant 0.$ (2)

本文的主要结果如下：

定理 1　设 $m < q \leqslant m + 2/N, m \geqslant 1, u(x,t)$是方程（1）在 S 上的非负解，则在 S 上 $u(x,t) = 0$.

2　定理 1 的证明

设 $1 \leqslant m < q, u(x,t)$是方程（1）在 S 上的一个非负解. 令 $0 < \tau < +\infty, 0 < r < R < +\infty, \eta$ 是一个$[0,+\infty) \to [0,1]$的 C^∞ 函数并且满足 $\eta' \geqslant 0$，当 $t \in [0,\tau]$时 $\eta(t) = 0$，当 $t \in [2\tau, +\infty)$时 $\eta(t) = 1$. $\xi \in C^\infty(S)$并且满足：

当$(x,t) \in S/P(R)$时 $\xi(x,t) = 0$；当$(x,t) \in \overline{P(r)}$时 $\xi(x,t) = 1$. 其中

$$P(R) = \left\{(x,t) \in S:\ t^{1/\theta} + |x|^2 < R, \theta = \frac{N(m-1)+2}{2}\right\}.$$

在（2）式中选取 $\varphi(x,t) = \xi^s\eta^2$，并在 $P(R)$上积分，这里 $s \geqslant 2$ 将在后面选取，得：

$$\int_{P(R)} (-|u|(\xi^s\eta^2)_t - |u|^{m-1}u\Delta(\xi^s\eta^2) - |u|^{q-1}u\xi^s\eta^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0,$$

$$-s\int_{P(R)} |u|\xi^{s-1}\xi_t\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t - 2\int_{P(R)} |u|\xi^s\eta\eta'\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{P(R)} |u|^{m-1}u\eta^2\Delta(\xi^s)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{P(R)} |u|^{q-1}u\xi^s\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

注意到：
$$\Delta\xi^s = s\xi^{s-1}\Delta\xi + s(s-1)\xi^{s-2}|\nabla_x\xi|^2.$$

因此有：
$$-s\int_{P(R)} |u|\xi^{s-1}\xi_t\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t - 2\int_{P(R)} |u|\xi^s\eta\eta'\mathrm{d}x\mathrm{d}t - s\int_{P(R)} |u|^{m-1}u\xi^{s-1}\Delta\xi\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$-s(s-1)\int_{P(R)} |u|^{m-1}u\xi^{s-2}|\nabla_x\xi|^2\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \geqslant \int_{P(R)} |u|^q\xi^s\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{3}$$

由于对所有的 $t \geqslant 0$ 有 $\eta' \geqslant 0$，所以

$$-2\int_{P(R)} |u|\xi^s\eta\eta'\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant 0. \tag{4}$$

由（3）式 -（4）式可得：

$$s\int_{P(R)} |u|\xi^{s-1}|\xi_t|\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + s\int_{P(R)} |u|^m \cdot \xi^{s-1}|\Delta\xi|\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + s(s-1)\int_{P(R)} |u|^m|\nabla_x\xi|^2\xi^{s-2}\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$\geqslant \int_{P(R)} |u|^q\xi^s\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{5}$$

对（5）式运用 Hölder 不等式得：

$$\left(\int_{P(R)\setminus P(r)} |u|^q\xi^s\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{P(R)} \xi^{s-\frac{q}{q-1}}\eta^2|\xi_t|^{\frac{q}{q-1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{q-1}{q}}$$
$$+\left(\int_{P(R)\setminus P(r)} |u|^q\xi^s\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{m}{q}}\left(\int_{P(R)} \xi^{s-\frac{q}{q-m}}\eta^2|\Delta\xi|^{\frac{q}{q-m}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{q-m}{q}}$$
$$+\left(\int_{P(R)\setminus P(r)} |u|^q\xi^s\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{m}{q}}\left(\int_{P(R)} |\nabla_x\xi|^{\frac{2q}{q-m}}\xi^{s-\frac{2q}{q-m}}\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{q-m}{q}}$$
$$\geqslant \gamma_1\int_{P(R)} |u|^q\xi^s\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{6}$$

在本文中，我们用 $\gamma_i(i=1,2,\cdots)$表示只与 m,q,N,s 等有关而与 τ,r,R 无关的正常数.

现在，我们选择 $\xi(x,t) = \psi((|x|^2 + t^{1/\theta})R^{-1})$，其中 ψ 是$[0,+\infty) \to [0,1]$的光滑函数，并满足：当 $y \in [0,1/2]$时 $\psi(y) = 1$；当 $y \in [1,+\infty)$时 $\psi(y) = 0$. 由于对任意的 $R = 2r > 0, (x,t) \in S$ 有

$$mes|P(R)| \leqslant \gamma_2 R^{N/2+\theta}, |\xi_t| \leqslant \gamma_2 R^{-\theta}, |\Delta\xi| \leqslant \gamma_2 R^{-1}, |\nabla_x\xi| \leqslant \gamma_2 R^{-1/2}.$$

由（6）式知，对任意 $s \geqslant \max\left\{\frac{q}{q-1}, \frac{2q}{q-m}\right\}$，

$$\left(\int_{P(R)\setminus P(r)} |u|^q \xi^s \eta^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} \times R^{(\frac{N}{2}+\theta-\theta\frac{q}{q-1})\times\frac{q-1}{q}} + \left(\int_{P(R)\setminus P(r)} |u|^q \xi^s \eta^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{m}{q}} \times R^{(\frac{N}{2}+\theta-\frac{q}{q-m})\times\frac{q-m}{q}}$$

$$\geqslant \gamma_3 \int_{P(R)} |u|^q \xi^s \eta^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{7}$$

注意到 $\theta = \frac{N(m-1)+2}{2}$，则对

$$1 \leqslant m < q \leqslant m + 2/N,$$

有

$$\left(\frac{N}{2} + \theta - \theta \times \frac{q}{q-1}\right)\frac{q-1}{q} \leqslant 0,$$

$$\left(\frac{N}{2} + \theta - \theta \times \frac{q}{q-m}\right)\frac{q-m}{q} \leqslant 0.$$

对（7）式运用 Young 不等式可得：

$$\int_S |u|^q \eta^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant \gamma_4.$$

由单调性，对任意序列 $\gamma_k \to +\infty$ 有：

$$\int_{P(2\gamma_k)\setminus P(\gamma_k)} |u|^q \eta^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \to 0. \tag{8}$$

由（7）式和（8）可得，当 $\gamma_k \to +\infty$ 时，

$$\int_{P(\gamma_k)} |u|^q \eta^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \to 0. \tag{9}$$

因此

$$\int_S |u|^q \eta^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$$

注意到对任意的 $\tau > 0, \eta(t)$ 在区间 $[2\gamma, +\infty]$ 上等于 1，可得 $u(x,t) \equiv 0$，几乎处处收敛于 S. 定理 1 证毕.

3 小结

本文利用分析技巧，在不考虑超平面 $t=0$ 上的初始迹的情况下，得到了方程没有非平凡非负整体解的条件. 由于在超平面 $t=0$ 上对方程的解没有附加任何条件，因此本文得到的结论是 Liouville 型的. 此外，本文所用的方法可应用于研究类似的拟线性椭圆和抛物方程.

[参考文献]

[1] VAZQUEZ J L. The porous medium equation [J]. Esaim Control Optimisation & Calculus of Variations, 2003, 9: 231－246.

[2] GURTIN M E, MACCAMY R C. On the diffusion of biological population [J]. Mathematical Biosciences , 1977, 33 (2): 35－49.

[3] DANDREUCCI D, E DIBENEDETTO E. On the Cauchy problem and initial traces for a class of evolution equations with strongly nonlinear sources [J]. Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa Classe Di Scienze, 1991, 18 (3): 95－105.

[4] QI Y W. The critical exponents of parabolic equations and blow-up in R^N [J]. Proceedings of the Royal Society of London A, 1998, 128 (1): 123－136.

[5] KARTSATOS A, KURTA V. On a Liouville-type theorem and the Fujita blow-up phenomenon [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2004, 132 (3): 807－813.