

# Dashnic-Zusmanovich 矩阵的逆的 无穷范数一个新上界

孙 益, 刘亚军, 冶海姣  
(云南大学 数学与统计学院, 云南 昆明 650500)

**摘要:** Dashnic-Zusmanovich 矩阵作为一类特殊的  $H$ -矩阵在数值代数中有着重要的作用. 利用矩阵逆的无穷范数, 给出了 Dashnic-Zusmanovich 矩阵逆的无穷范数的一个新上界. 通过给出的 Dashnic-Zusmanovich 矩阵逆的无穷范数的新上界得到了 Dashnic-Zusmanovich 矩阵最小奇异值新的下界, 并经过比较 Dashnic-Zusmanovich 矩阵逆的无穷范数的新上界与已有的结果, 从理论上证明了 Dashnic-Zusmanovich 矩阵逆的无穷范数的新上界改进了已有的结果, 同时通过数值例子证明该上界改进了相关结果.

**关键词:** Dashnic-Zusmanovich 矩阵;  $H$ -矩阵; 非奇异性; 逆的无穷范数

中图分类号: O151.21 文献标识码: A 文章编号: 1674 - 5639 (2018) 06 - 0067 - 05

DOI: 10.14091/j.cnki.kmxyxb.2018.06.013

## A New Upper Bound for the Infinity Norm of Inverse Matrix of Dashnic-Zusmanovich Matrix

SUN Yi, LIU Yajun, YE Haijiao

(College of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming, Yunnan, China 650500)

**Abstract:** As a special class of  $H$ -matrices, the Dashnic-Zusmanovich matrix plays an important role in the numerical algebra. By using the infinite norm of the inverse of the matrix, a new upper bound of the infinite norm of the inverse of the Dashnic-Zusmanovich matrix is given. By the new upper bound of the infinite norm of the inverse of the Dashnic-Zusmanovich matrix, a new lower bound of the minimum singular value of the Dashnic-Zusmanovich matrix is obtained. By comparing the new upper bounds of the infinite norm of the inverse of the Dashnic-Zusmanovich matrix and the existing results, it is proved theoretically that the new upper bounds of the infinite norm of the inverse of the Dashnic-Zusmanovich matrix have improved the existing results, and the results are improved by numerical examples.

**Key words:** Dashnic-Zusmanovich matrix;  $H$ -matrix; nonsingularity; infinite norm of inverse

### 1 预备知识

$H$ -矩阵不仅在数值分析中有着重要的作用, 还在优化理论和其他应用科学 (如控制系统的稳定性) 中有着非常重要的应用. Cvetković 在文献 [1] 中通过研究  $H$ -矩阵的性质得到了更好的特征值定位集.

**定义 1**<sup>[2]</sup> 设矩阵  $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$ , 称  $\langle A \rangle = (\bar{a}_{ij})$  为矩阵  $A$  的比较矩阵, 其中

$$\bar{a}_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i=j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j. \end{cases}$$

若  $\langle A \rangle^{-1} \geq 0$  且  $\langle A \rangle_{ij}^{-1} \leq 0$  ( $i \neq j$ ), 则称  $A$  为  $M$ -矩阵; 若  $\langle A \rangle$  为非奇异  $M$ -矩阵, 则称矩阵  $A$

收稿日期: 2018 - 07 - 05

基金项目: 中国科学院西部之光人才资助项目 (W8090303); 云南省应用基础研究计划面上资助项目 (2018FB001).

作者简介: 孙益 (1994—), 女, 广东惠州人, 在读硕士, 主要从事矩阵理论及其应用研究.

是  $H$ -矩阵.

由于直接判定一个矩阵是否为  $H$ -矩阵是非常复杂的, 因此转而研究其子类矩阵, 如: 严格对角占优矩阵、双严格对角占优矩阵、Dashnic-Zusmanovich 矩阵等. 本文主要对 Dashnic-Zusmanovich 矩阵进行研究, 其定义如下:

**定义 2**<sup>[3]</sup> 若  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ , 存在  $j \in N = \{1, 2, \dots, n\}, j \neq i$ , 使得

$$(|a_{ii}| - r_i^j(A)) |a_{ij}| > |a_{ij}| r_j(A),$$

其中

$$r_i^j(A) = r_i(A) - |a_{ij}|, r_i(A) = \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|,$$

则矩阵  $A$  称为 Dashnic-Zusmanovich 矩阵, 简记为  $D-Z$  矩阵.

近年来, 许多学者对  $D-Z$  矩阵的性质进行研究, 并得到了许多结果<sup>[2-3]</sup>, 如文献 [4] 给出了  $SDD$ ,  $DSDD$ ,  $D-Z$  和  $H$ -矩阵的关系:

$$\{SDD\} \subseteq \{DSDD\} \subseteq \{D-Z\} \subseteq \{H\}.$$

通过研究  $SDD$ ,  $DSDD$ ,  $D-Z$  和  $H$ -矩阵的关系可以得到矩阵新的特征值定位, 而研究  $D-Z$  矩阵可以更加清楚地了解  $H$ -矩阵的性质, 因此研究  $D-Z$  的特征值定位集是极其必要的. 文献 [1] 证明了  $D-Z$  矩阵是一个非奇异  $H$ -矩阵, 利用  $D-Z$  矩阵的非奇异性所得到的特征值定位要比  $H$ -矩阵所得到的特征值区域更精确, 而且比  $SDD$  和  $DSDD$  所得到的特征值定位区域更广.

在实际计算中常常用  $\|A^{-1}\|_{\infty}$  来估计矩阵  $A$  的特征值的上界, 文献 [5~6] 均说明了  $\|A^{-1}\|_{\infty}$  在估计矩阵特征值定位中有着极其重要的作用. 因此, 本文通过矩阵的逆的无穷范数对  $D-Z$  矩阵进行研究, 从而得到  $D-Z$  矩阵逆的无穷范数的一个新上界.

**定理 1**<sup>[2]</sup> 设矩阵  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$  是  $D-Z$  矩阵, 则  $\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \alpha(A)$ , 其中

$$\alpha(A) = \max \{ \alpha_1(A), \alpha_2(A) \},$$

$$\alpha_1(A) = \max_{j \in N, i \neq j} \frac{|a_{ji}| + |a_{ii}|}{(|a_{ij}| - r_i(A) + |a_{ji}|) |a_{ii}| - |a_{ii}| r_i(A)},$$

$$\alpha_2(A) = \max_{j \in N, i \neq j} \frac{|a_{ij}| - r_i(A) + |a_{ji}| + r_i(A)}{(|a_{ij}| - r_i(A) + |a_{ji}|) |a_{ii}| - |a_{ii}| r_i(A)}.$$

于是本文利用矩阵逆的范数定义, 得到  $D-Z$  矩阵逆的无穷范数的一个新上界, 并证明该上界优于上述定理 1 中的界.

## 2 主要结果

众所周知, 当矩阵  $A$  非奇异时, 文献 [4] 给出了如下结果:

$$\|A^{-1}\|_{\infty}^{-1} = \inf_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = \min_{\|x\|_{\infty} = 1} \|Ax\|_{\infty} = \max_{i \in N} |(Ax^*)_i|. \quad (1)$$

当  $\|x^*\|_{\infty} = 1$ , 对每个  $i \in N$

$$|(Ax^*)_i| = \left| \sum_{j \in N} a_{ij} x_j^* \right| \geq |a_{ii}| |x_i^*| - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}| |x_j^*|. \quad (2)$$

利用上述可得如下  $D-Z$  矩阵逆的无穷范数的上界.

**定理 2** 设  $A \in C^{n \times n}$  为  $D-Z$  矩阵, 则

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \mu_1(A) := \max_{i \neq j, i \in N} \frac{|a_{ii}| - r_i^j(A) + r_j(A)}{(|a_{ii}| - r_i^j(A)) |a_{ij}| - |a_{ij}| r_j(A)}.$$

**证明** 因为  $A$  是非奇异的, 由 (1) 式和 (2) 式, 对指数  $k$  和  $t$  有

$$\|x^*\|_{\infty} = |x_k^*| = 1 \geq |x_t^*| \geq |x_j^*|, j \in N \setminus \{k\},$$

对  $i = t, i = k$  由 (2) 式得

$$|(Ax^*)_k| \geq |a_{kk}| - \sum_{j \in N \setminus \{k\}} |a_{kj}| |x_j^*| = |a_{kk}| - r_k(A) |x_t^*|,$$

和 
$$|(Ax^*)_i| \geq |a_u| - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}| + |a_{ik}| |x_i^*| - |a_{tk}| = (|a_u| - r_i(A) + |a_{tk}|) |x_i^*| - |a_{tk}|.$$

由 (1) 式得

$$\|A^{-1}\|_{\infty}^{-1} \geq \max\{|a_{kk}| - r_k(A) |x_i^*|, |a_u| - r_i(A) |x_i^*| - |a_{tk}|\}.$$

$\|A^{-1}\|_{\infty}^{-1}$  下界有下面两种情况:

1) 
$$\begin{aligned} |a_{kk}| - r_k(A) |x_i^*| &\geq (|a_{tk}| - r_i(A) + |a_{tk}|) |x_i^*| - |a_{tk}|, \\ |a_{kk}| + |a_{tk}| &\geq (r_k(A) - r_l(A) + |a_u| + |a_{tk}|) |x_i^*|, \end{aligned}$$

$$|x_i^*| \leq \frac{|a_{kk}| + |a_{tk}|}{r_k(A) - r_l(A) + |a_u| + |a_{tk}|},$$

$$\|A^{-1}\|_{\infty}^{-1} \geq |a_{kk}| - r_k(A) |x_i^*| \geq \frac{(|a_{kk}| - r_i(A) + |a_{tk}|) |a_{kk}| - |a_{tk}| r_k(A)}{|a_u| - r_i(A) + |a_{tk}| + r_k(A)}.$$

2) 
$$(|a_{tk}| - r_i(A) + |a_{tk}|) |x_i^*| - |a_{tk}| \geq |a_{kk}| - r_k(A) |x_i^*|,$$

$$|x_i^*| \geq \frac{|a_{kk}| + |a_{tk}|}{r_k(A) - r_l(A) + |a_u| + |a_{tk}|},$$

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\|_{\infty}^{-1} &\geq (|a_u| - r_i(A) + |a_{tk}|) |x_i^*| - |a_{tk}| \\ &\geq \frac{(|a_u| - r_i(A) + |a_{tk}|) |a_{kk}| - |a_{tk}| r_k(A)}{|a_u| - r_i(A) + |a_{tk}| + r_k(A)}, \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\|_{\infty}^{-1} &\geq \frac{(|a_u| - r_l(A) + |a_{tk}|) |a_{kk}| - |a_{tk}| r_k(A)}{|a_u| - r_i(A) + |a_{tk}| + r_k(A)} \\ &\geq \min_{i \neq j: |a_{ii}| - r_i(A) + |a_{ij}| + r_j(A)} \frac{(|a_{ii}| - r_i(A) + |a_{ij}|) |a_{jj}| - |a_{ij}| r_j(A)}{|a_{ii}| - r_i(A) + |a_{ij}| + r_j(A)}, \end{aligned}$$

则  
即

$$\begin{aligned} |a_u| - r_i(A) + |a_{tk}| + r_k(A) &= 0, \\ |a_u| - r_i(A) + |a_{tk}| &= r_k(A) = 0. \end{aligned}$$

综上所述可得

$$\|A^{-1}\|_{\infty}^{-1} \geq \max\{|a_{kk}|, -|a_{tk}|\} = |a_{kk}|.$$

若  $|a_{ii}| - r_i(A) + |a_{ij}| \neq 0$ , 则

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\|_{\infty}^{-1} &\geq |a_{kk}| = \frac{(|a_{ii}| - r_i(A) + |a_{ij}|) |a_{kk}|}{|a_{ii}| - r_i(A) + |a_{ij}|} \\ &= \frac{(|a_{ii}| - r_i(A) + |a_{ij}|) |a_{kk}| - |a_{tk}| r_k(A)}{|a_{ii}| - r_i(A) + |a_{ij}| + r_k(A)} \\ &\geq \min_{i \neq j: |a_{ii}| - r_i(A) + |a_{ij}| + r_j(A)} \frac{(|a_{ii}| - r_i(A) + |a_{ij}|) |a_{jj}| - |a_{ij}| r_j(A)}{|a_{ii}| - r_i(A) + |a_{ij}| + r_j(A)}. \end{aligned}$$

若  $|a_{ii}| - r_i(A) + |a_{ij}| = 0$ , 则

$$\begin{aligned} \mu_1^{-1}(A) &= \min_{i \neq j: |a_{ii}| - r_i(A) + |a_{ij}| + r_j(A)} \frac{(|a_{ii}| - r_i(A) + |a_{ij}|) |a_{jj}| - |a_{ij}| r_j(A)}{|a_{ii}| - r_i(A) + |a_{ij}| + r_j(A)} \\ &= \min_{i \neq j: |a_{ii}| - r_i(A) + |a_{ij}| + r_j(A)} \frac{-|a_{ij}| r_j(A)}{|a_{ii}| - r_i(A) + |a_{ij}| + r_j(A)}. \end{aligned}$$

因为

$$|a_{ii}| - r_i(A) + r_j(A) > 0,$$

所以

$$\min_{i \neq j: |a_{ii}| - r_i(A) + |a_{ij}| + r_j(A)} \frac{-|a_{ij}| r_j(A)}{|a_{ii}| - r_i(A) + |a_{ij}| + r_j(A)} \leq 0,$$

则  
即

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\|_{\infty}^{-1} &\geq |a_{kk}| \geq 0 \geq \mu_1(A), \\ \|A^{-1}\|_{\infty} &\leq \mu_1(A). \end{aligned}$$

定理 2 证毕.

通过  $\|A\|_{\infty}$ ,  $\|A\|_1$ ,  $\|A\|_2$  的定义易得下面的结果:

**推论 1** 若矩阵  $A$  是  $D$ - $Z$  矩阵, 则  $\|A^{-1}\|_1 \leq \mu_1(A^T)$ .

通过定理 2 可得  $D$ - $Z$  矩阵最小奇异值的下界, 即推论 2.

**推论 2** 若矩阵  $A$  是  $D$ - $Z$  矩阵, 则  $\sigma(A) \geq \sqrt{\frac{1}{\mu_1(A)\mu_1(A^T)}}$ .

通过比较定理 2 与定理 1 (即文献 [2] 中定理 1), 可得如下定理 3.

**定理 3** 若矩阵  $A$  是  $D$ - $Z$  矩阵, 则

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \mu_1(A) \leq \alpha(A),$$

其中

$$\mu_1(A) := \max_{i \neq j, i \in N} \frac{|a_{ii}| - r_i(A) + |a_{ij}| + r_j(A)}{(|a_{ii}| - r_i(A) + |a_{ij}|) |a_{jj}| - |a_{ij}| r_j(A)};$$

$$\alpha(A) = \max \left\{ \begin{array}{l} \max_{j \in N, i \neq j} \frac{|a_{ji}| + |a_{ii}|}{(|a_{jj}| - r_i(A) + |a_{ji}|) |a_{ii}| - |a_{ii}| r_i(A)} \\ \max_{j \in N, i \neq j} \frac{|a_{jj}| - r_i(A) + |a_{ji}| + r_i(A)}{(|a_{jj}| - r_i(A) + |a_{ji}|) |a_{ii}| - |a_{ii}| r_i(A)} \end{array} \right\}$$

通过比较定理 2 与定理 1 易证定理 3 成立.

类似地, 通过比较推论 2 与文献 [2] 中定理 2, 可得如下定理 4.

**定理 4** 若矩阵  $A$  是  $D$ - $Z$  矩阵, 则

$$\sigma(A) > \sigma_1(A),$$

其中

$$\sigma(A) \geq \sqrt{\frac{1}{\mu_1(A)\mu_1(A^T)}}, \quad \sigma_1(A) \geq \sqrt{\frac{1}{\alpha(A)\alpha(A^T)}}.$$

通过比较推论 2 与文献 [2] 中定理 2 易证定理 4 成立.

### 3 数值例子

**例 1** 考虑文献 [2] 中的例子,  $A$  即  $D$ - $Z$  矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 1 & 0.6 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix},$$

由文献 [2] 的定理 1、推论 1、定理 2 分别得

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq 28, \quad \|A^{-1}\|_1 \leq 11.5, \quad \sigma_1(A) \geq 0.056.$$

应用定理 2、推论 1、推论 2 可得

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq 15, \quad \|A^{-1}\|_1 \leq 9, \quad \sigma(A) \geq 0.0861.$$

即 15 是定理 2 给出矩阵逆的无穷范数的上界, 0.0861 是推论 2 给出矩阵特征值的下界. 数值例子表明, 本文给出的  $D$ - $Z$  矩阵的逆的无穷范数的上界优于已经存在的  $D$ - $Z$  矩阵的上界.

**例 2** 考虑  $D$ - $Z$  矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 1 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 1 \end{pmatrix},$$

由文献 [2] 的定理 1、推论 1、定理 2 分别得

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq 35, \quad \|A^{-1}\|_1 \leq 40, \quad \sigma_1(A) \geq 0.0267.$$

应用定理 2、推论 1、推论 2 可得

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq 15, \quad \|A^{-1}\|_1 \leq 30, \quad \sigma(A) \geq 0.0471.$$

即 15 是定理 2 给出矩阵逆的无穷范数的上界, 0.0471 是推论 2 给出矩阵特征值的下界. 因此数值例子表明, 本文给出的  $D$ - $Z$  矩阵的逆的无穷范数的上界优于已经存在的  $D$ - $Z$  矩阵的上界.

**致谢:** 感谢我的导师李朝迁副教授对本文的细心指导, 在此对李朝迁老师表达我真挚的感谢和崇高的敬意!

## [参考文献]

- [1] CVETKOVIĆ L, KOSTIĆ V, BRU R, et al. A simple generalization of Gersgorin's theorem [J]. *Advances in Computational Mathematics*, 2011, 35: 271–280.
- [2] 李艳艳. Dashnic-Zusmanovich 矩阵的逆的无穷范数上界的估计 [J]. *西南师范大学学报 (自然科学版)*, 2017, 42 (6): 1–4.
- [3] 蒋建新. 块  $H$  矩阵的逆矩阵无穷范数和最小奇异值的估计 [J]. *文山学院学报*, 2014, 27 (6): 34–36.
- [4] CVETKOVIĆ L.  $H$ -matrix theory vs: eigenvalue localization [J]. *Numerical Algorithms*, 2007, 42: 229–245.
- [5] 杨占山. 严格  $\alpha$ -对角占优  $M$ -矩阵逆的无穷范数的上界估计 [D]. 兰州: 兰州大学, 2011.
- [6] ZHAO J X, LIU Q L, LI C Q, et al. Dashnic-Zusmanovich type matrices: a new subclass of nonsingular  $H$ -matrices [J]. *Linear Algebra & Its Applications*, 2018, 552: 277–287.

.....

(上接第42页)

- [12] SASAOKA K, KILO M. Studies on the biosynthesis of theanine in tea seedlings synthesis of theanine by the homogenate of tea seedlings [J]. *Agric Biol Chem*, 1963, 27 (6): 467–468.
- [13] 肖涵, 申亮, 杨婉秋. 云南普洱地区大叶种茶酚氨比研究 [J]. *昆明学院学报*, 2017, 39 (3): 34–39.
- [14] 林家雄, 钊相龙, 陈春月, 等. 云南普洱和临沧地区茶产品游离氨基酸总量测定研究 [J]. *昆明学院学报*, 2017, 39 (3), 30–33.
- [15] 张民, 李银花, 袁晴春, 等. 近红外光谱对鲜茶叶茶多酚和氨基酸总量检测的研究 [J]. *上海农业学报*, 2015, 31 (6): 36–40.
- [16] 苗雨田, 杨悠悠, 李颂, 等. 全自动氨基酸分析仪快速测定乌龙茶中  $\gamma$ -氨基丁酸 [J]. *食品安全专刊*, 2015, 21 (4): 231–235.
- [17] 张峻萍, 方从兵, 宛晓春, 等. 茶叶中茶氨酸的胶束电动毛细管电泳定量方法初步研究 [J]. *茶叶通报*, 2006, 28 (3): 108–110.
- [18] 陈林, 陈健, 王丽丽, 等. 不同茶类制法对茶多酚和游离氨基酸化学模式的影响 [J]. *福建农业学报*, 2017, 32 (3): 287–293.
- [19] 廖珺. 摊放 (萎凋) 技术对茶鲜叶游离氨基酸影响的研究进展 [J]. *氨基酸和生物资源*, 2016, 38 (4): 15–19.
- [20] 陈丹, 叶小辉, 俞滢, 等. 不同等级云南红碎茶的氨基酸组分分析 [J]. *福建茶叶*, 2014, 36 (4): 24–26.

